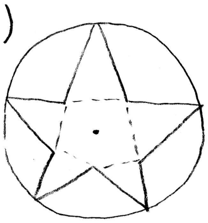
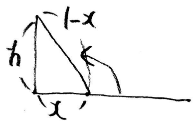
東大理科　1981前期 ⑤

(1)

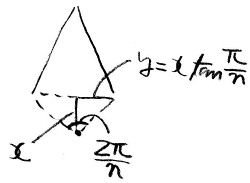




円の中心からのキョリが $x\ (0<x<\frac{1}{2})$ の地点で折って正 n 角錐を作ることを考える。

正 n 角錐の高さを h とすると

$x^2+h^2=x^2-2x+1 \quad h=\sqrt{-2x+1}$



※ $\tan\frac{\pi}{n}=\frac{y}{x}.\ y=x\tan\frac{\pi}{n}$

正 n 角錐の体積は

底面積が $2x\tan\frac{\pi}{n}\cdot x\cdot\frac{1}{2}=x^2\tan\frac{\pi}{n}$

高さが $\sqrt{-2x+1}$

の三角錐の n 倍であるから

$\frac{1}{3}n\tan\frac{\pi}{n}x^2\sqrt{-2x+1}$

$f(x)=x^4(-2x+1)=-2x^5+x^4\ (0<x<\frac{1}{2})$ とする。

$f'(x)=-10x^4+4x^3.\ f'(x)=0$ のとき $x=0.\frac{2}{5}$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{5}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$(\frac{2}{5})^4\frac{1}{5}$	$\searrow$	0

$f(x)$ の増減表は左表のようになる。

よって、$f(x)$ の最大値は $(\frac{2}{5})^4\frac{1}{5}$

$V_n=\frac{1}{3}n\tan\frac{\pi}{n}(\frac{2}{5})^2\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{375}n\tan\frac{\pi}{n}$

(2) $\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{4\sqrt{5}}{375}\lim_{n\to\infty}n\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{4\sqrt{5}}{375}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\pi\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{4\sqrt{5}}{375}\pi$