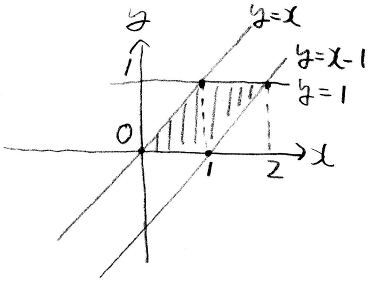
東大理科　1982前期　5



xy平面で、$0 \leqq y \leqq 1$, $y \leqq x \leqq y+1$を満たすのは左図の斜線部である。

$1+x+y-3(x-y)y = 1+x+y-3xy+3y^2$

$= 3\left\{y^2+\left(-x+\frac{1}{3}\right)y+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\right)^2\right\}-3\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{36}\right)+x+1$

$= 3\left(y-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{11}{12}$

$= 3\left(y-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{3}{4}(x^2-2x+1)+\frac{20}{12} = 3\left(y-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{3}{4}(x-1)^2+\frac{5}{3}$

$x=0, 2$のとき、これは$-\frac{3}{4}+\frac{5}{3} = \frac{-9+20}{12} = \frac{11}{12} > 0$であるから、

$0 \leqq y \leqq 1$, $y \leqq x \leqq y+1$のとき、$1+x+y-3(x-y)y > 0$.

この立体を平面$y=k$で切った切り口の面積は、

$\int_k^{k+1}\{1+x+k-3(x-k)k\}dx = \int_k^{k+1}\{(-3k+1)x+3k^2+k+1\}dx$

$= \left[(-3k+1)\frac{x^2}{2}+(3k^2+k+1)x\right]_k^{k+1} = \left(-\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}\right)\{(k+1)^2-k^2\}+(3k^2+k+1)(k+1-k)$

$= \left(-\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}\right)(2k+1)+3k^2+k+1 = \cancel{-3k^2}-\frac{3}{2}k+k+\frac{1}{2}+\cancel{3k^2}+k+1 = \frac{1}{2}k+\frac{3}{2}$

求める体積は　$\int_0^1\left(\frac{1}{2}k+\frac{3}{2}\right)dk = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{k^2}{2}+\frac{3}{2}k\right]_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{3}{2} = \frac{7}{4}$