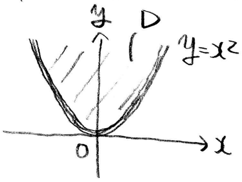
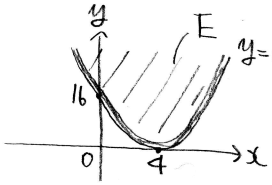
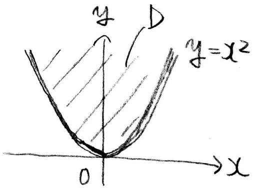
東大理科　1984前期　⑥





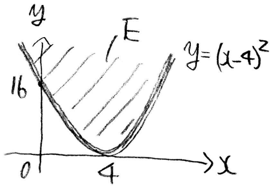
Uの境界線の方程式は
$y=-(x-2a)^2+2b$ —①



$D\cap U\neq\phi$ が成り立つためには、$y=x^2$ と①が交点を持てばよく、

$x^2=-(x-2a)^2+2b$，$x^2=-x^2+4ax-4a^2+2b$，$x^2-2ax+2a^2-b=0$ が解を持てばよく、

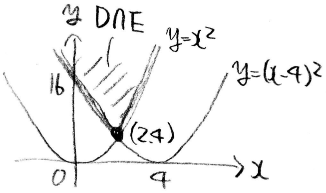
$a^2-(2a^2-b)\geqq 0$，$-a^2+b\geqq 0$，$b\geqq a^2$ —②



$E\cap U\neq\phi$ が成り立つためには、$y=(x-4)^2$ と①が交点を持てばよく、

$(x-4)^2=-(x-2a)^2+2b$，$x^2-8x+16=-x^2+4ax-4a^2+2b$，$x^2+(-2a-4)x+2a^2-b+8=0$ が解を持てばよく、

$(-a-2)^2-(2a^2-b+8)\geqq 0$，$a^2+4a+4-2a^2+b-8\geqq 0$，$-a^2+4a-4+b\geqq 0$，$b\geqq (a-2)^2$ —③



$D\cap E\cap U=\phi$ が成り立つためには、

$y=(x-4)^2$ と①が $x\leqq 2$ で交わらない —④

かつ、$y=x^2$ と①が $x\geqq 2$ で交わらない —⑤

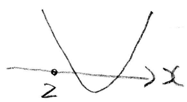
が成り立てばよい。

※ $y=x^2$ と $y=(x-4)^2$ の交点は
$x^2=x^2-8x+16$，$x=2$ より $(2,4)$

④が成り立つためには、$(x-4)^2=-(x-2a)^2+2b$，$x^2-8x+16=-x^2+4ax-4a^2+2b$

$x^2+(-2a-4)x+2a^2-b+8=0$，$x^2-2(a+2)x+(a+2)^2+a^2-4a-b+4=0$

$\{x-(a+2)\}^2+(a-2)^2-b=0$ が $x\leqq 2$ で解を持たなければよく、



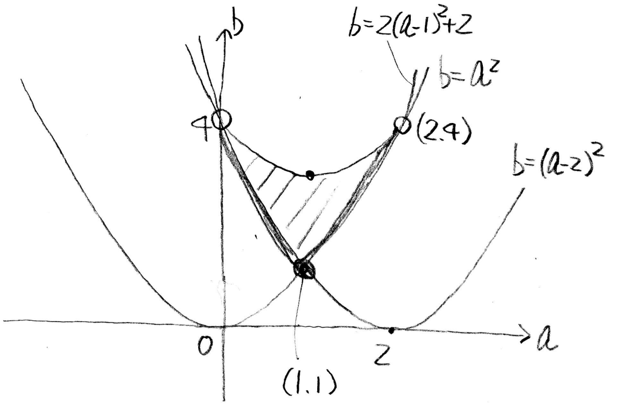
$(a-2)^2-b>0$，$b<(a-2)^2$，または、$a+2\geqq 2$，$a\geqq 0$，かつ，$4-4a-\cancel{8}+2a^2-b+\cancel{8}>0$，$2(a^2-2a+1)+2-b>0$

$b<2(a-1)^2+2$ —⑥

⑤が成り立つためには、$x^2=-(x-2a)^2+2b$，$x^2=-x^2+4ax-4a^2+2b$，$x^2-2ax+2a^2-b=0$

$(x-a)^2+a^2-b=0$ が $x\geqq 2$ で解を持たなければよく、

$a^2-b>0$，$b<a^2$，または、$a\leqq 2$，かつ，$4-4a+2a^2-b>0$，$2(a^2-2a+1)+2-b>0$，$b<2(a-1)^2+2$ —⑦



※ $b=a^2$ と $b=(a-2)^2$ の交点は
$a^2=a^2-4a+4$，$a=1$ より $(1,1)$

$b=a^2$ と $b=2(a-1)^2+2$ の交点は
$a^2=2a^2-4a+2+2$，$a^2-4a+4=0$，$(a-2)^2=0$，$a=2$ より $(2,4)$

$b=(a-2)^2$ と $b=2(a-1)^2+2$ の交点は
$a^2-4a+4=2a^2-4a+2+2$，$a^2=0$，$a=0$ より $(0,4)$

②③⑥⑦より上図の斜線部
太線上の境界線上の点含む。