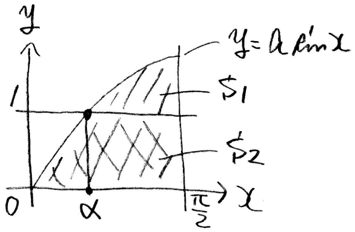
東大理科　1985前期　①



αは, $a\sin\alpha=1$, $0<\alpha\leqq\frac{\pi}{2}$, を満たすとする.

$$S_1=\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} a\sin x\,dx-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=a\left[-\cos x\right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}+\alpha$$
$$=a\cos\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha$$

$$S_2=\int_0^\alpha a\sin x\,dx+\frac{\pi}{2}-\alpha=a\left[-\cos x\right]_0^\alpha+\frac{\pi}{2}-\alpha$$
$$=-a\cos\alpha+a+\frac{\pi}{2}-\alpha$$

$$S_2-S_1=-a\cos\alpha+a+\frac{\pi}{2}-\alpha-a\cos\alpha+\frac{\pi}{2}-\alpha=-2a\cos\alpha+a+\pi-2\alpha$$

$a=\frac{1}{\sin\alpha}$ より. $S_2-S_1=-\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}+\pi-2\alpha$

$f(\alpha)=\frac{-2\cos\alpha+1}{\sin\alpha}-2\alpha+\pi$　$\left(0<\alpha\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ とする.

$$f'(\alpha)=\frac{2\sin\alpha\cdot\sin\alpha-(-2\cos\alpha+1)\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-2=\frac{2(1-\cos^2\alpha)+2\cos^2\alpha-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-2$$
$$=\frac{2-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha}=\frac{2\cos\alpha\left(\cos\alpha-\frac{1}{2}\right)}{\sin^2\alpha}$$

$f'(\alpha)=0$ のとき. $\cos\alpha=0,\ \frac{1}{2}$　, $\alpha=\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}$

α	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$	+	0	−	0
$f(\alpha)$	↗	$\frac{\pi}{3}$	↘	

f(α)の増減表は左表のようになる

f(α)は α=$\frac{\pi}{3}$のとき 最大値 $\frac{\pi}{3}$ をとる

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cancel{\frac{-2\frac{1}{2}+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}-2\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{\pi}{3}$

$\alpha=\frac{\pi}{3}$のとき　$a=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

以上より. S_2-S_1 は $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき 最大値 $\frac{\pi}{3}$ をとる.