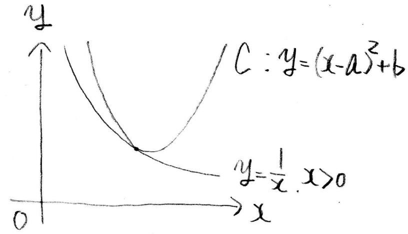
東大理科　1987前期　②



$f(x)=(x-a)^2+b$, $g(x)=\frac{1}{x}\ (x>0)$ とする。接点の x 座標を X とする。

$f'(x)=2(x-a)$ より $x=X$ における $y=f(x)$ の接線の傾きは $2(X-a)$

$g'(x)=-\frac{1}{x^2}$ より $x=X$ における $y=g(x)$ の接線の傾きは $-\frac{1}{X^2}$

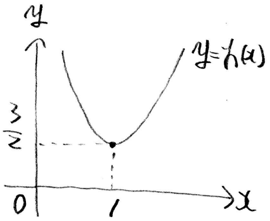
$2(X-a)=-\frac{1}{X^2}$ より $X-a=-\frac{1}{2X^2}$, $a=X+\frac{1}{2X^2}$

$h(x)=x+\frac{1}{2x^2}\ (x>0)$ とする。$h'(x)=1-\frac{1}{x^3}$, $h'(x)=0$ のとき $x=1$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	∞	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	∞

$h(x)$ の増減表は左表

$y=h(x)$ のグラフは右図



また $(X-a)^2+b=\frac{1}{X}$ より $\frac{1}{4X^4}+b=\frac{1}{X}$, $b=\frac{1}{X}-\frac{1}{4X^4}$

$k(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{4x^4}\ (x>0)$ とする。$k'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}$, $k'(x)=0$ のとき $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^5}$, $x^3=1$, $x=1$

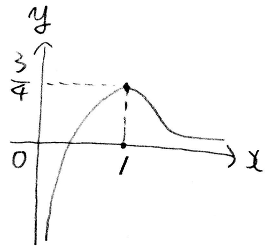
x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0

$k(x)$ の増減表は左表

$y=k(x)$ のグラフは右図

※ $\lim_{x\to+0} k(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{4x^3}\right)=-\infty$

$\lim_{x\to\infty} k(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{4x^3}\right)=0$

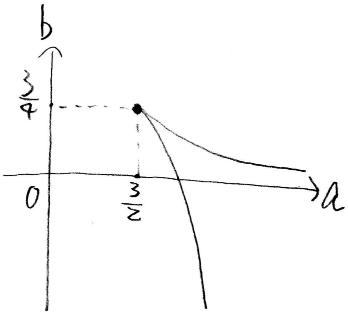


$a=\frac{3}{2}$ のとき X となり得る値は 1 のみであり、このとき $b=\frac{3}{4}$ であればよい。

$a>\frac{3}{2}$ のとき X となり得る値は 2 つあり、これを $X_\alpha, X_\beta\ (X_\alpha<X_\beta)$ とする。

$a\to\infty$ のとき、X_α は単調減少, $X_\alpha\to 0$. このとき b は単調減少, $b\to-\infty$

X_β は単調増加, $X_\beta\to\infty$. このとき b は単調減少, $b\to 0$



以上より (a, b) の存在する範囲の概形は左図

二曲線が接する点以外に共有点を持たないとき

$(x-a)^2+b=\frac{1}{x}$, $x^3-2ax^2+(a^2+b)x-1=0$ が3重解を持てばよいから

$x^3-2ax^2+(a^2+b)x-1=(x-k)^3$

$=x^3-3kx^2+3k^2x-k^3$

$\begin{cases} 2a=3k \\ a^2+b=3k^2 \\ 1=k^3 \end{cases}$　$k=1$, $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{9}{4}+3=\frac{3}{4}$