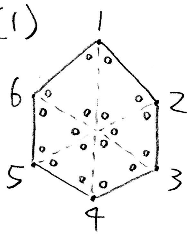
東大理科　1987前期 ⑥

(1)



直角三角形になる三点の選び方は左表，3個のサイコロを振るとする

このように目が出るのは $12\times3!=72$通り

すべての目の出方は $6\times6\times6=216$通り

よって $p_3=\frac{72}{216}=\frac{1}{3}$

$36\times6=216$

しるしをつけた点	直角三角形になるか
1-2-3	×
1-2-4	○
1-2-5	○
1-2-6	×
1-3-4	○
1-3-5	×
1-3-6	○
1-4-5	○
1-4-6	○
1-5-6	×
2-3-4	×
2-3-5	○
2-3-6	○
2-4-5	○
2-4-6	×
2-5-6	○
3-4-5	×
3-4-6	○
3-5-6	○
4-5-6	×

しるしのついていない点	直角三角形が存在するか
1-2	○
1-3	○
1-4	○
1-5	○
1-6	○
2-3	○
2-4	○
2-5	○
2-6	○
3-4	○
3-5	○
3-6	○
4-5	○
4-6	○
5-6	○

n個のサイコロを振るとする

一点にしるしがついているとき、直角三角形は存在しない

この確率は $6\left(\frac{1}{6}\right)^n$

二点にしるしがついているとき、直角三角形は存在しない

この確率は $\frac{6\cdot5}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=15\left(\frac{1}{3}\right)^n-30\left(\frac{1}{6}\right)^n$

左表より、三点にしるしがついているとき、$\frac{2}{5}$の確率で、直角三角形は存在しない

この確率は $\frac{2}{5}\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}-3\left(\frac{1}{6}\right)^n\right]$

$=8\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=8\left(\frac{1}{2}\right)^n-24\left(\frac{1}{3}\right)^n+24\left(\frac{1}{6}\right)^n$

左表より、四点、五点、六点にしるしがついているとき、直角三角形は存在する。

以上より $p_n=1-\cancel{6\left(\frac{1}{6}\right)^n}-15\left(\frac{1}{3}\right)^n+\cancel{30\left(\frac{1}{6}\right)^n}-8\left(\frac{1}{2}\right)^n+24\left(\frac{1}{3}\right)^n-\cancel{24\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

$=1-8\left(\frac{1}{2}\right)^n+9\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$p_4=1-8\frac{1}{16}+9\frac{1}{81}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}=\frac{18-9+2}{18}=\frac{11}{18}$

(2) $\log(1-p_n)=\log\left\{8\left(\frac{1}{2}\right)^n-9\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\log\left(\frac{1}{2}\right)^n\left\{8-9\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=-n\log2+\log\left\{8-9\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\lim_{n\to\infty}\left[-\log2+\frac{\log\left\{8-9\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}{n}\right]=-\log2$