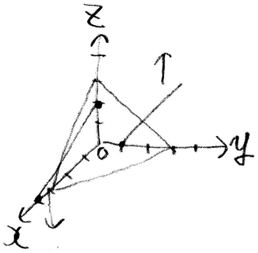
東大文科 1988前期 ③

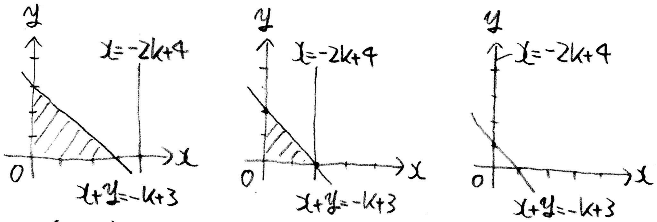


$0 \leqq k \leqq 2$ とする.

$x+y+z=3$ と $z=k$ の交線は $x+y=-k+3$

$x+2z=4$ と $z=k$ の交線は $x=-2k+4$

$y-z=1$ と $z=k$ の交線は $y=k+1$

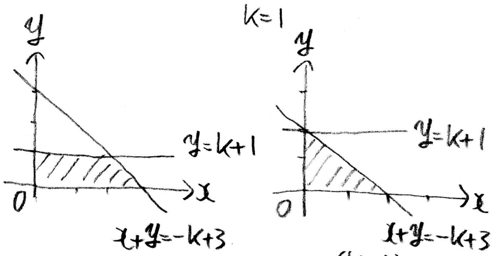


(k=0) (k=1) (k=2)

$x+y=-k+3$ と $x=-2k+4$ の位置関係は左図

※ $-k+3=-2k+4$ のとき $k=1$

$k=1$

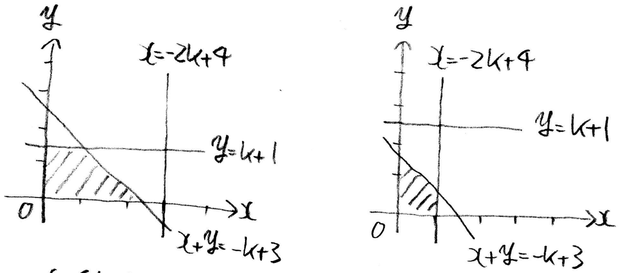


(k=0) (k=1)

※ $-k+3=k+1$ のとき $k=1$

$x+y=-k+3$ と $y=k+1$ の位置関係は左図

立体を $z=k$ で切ったときの切り口の面積を $S(k)$ とすると $S(k)$ は右図のようになる



$(0 \leqq k \leqq 1)$ $(1 \leqq k \leqq 2)$

$S(k)=(-k+3-2k+2)(k+1)\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}(-3k+5)(k+1)$

$=-\frac{3}{2}k^2+k+\frac{5}{2}$

$S(k)=(-\cancel{k}+3+\cancel{k}-1)(-2k+4)\frac{1}{2}$

$=-2k+4$

よって求める体積は $\int_0^1\left(-\frac{3}{2}k^2+k+\frac{5}{2}\right)dk+\int_1^2(-2k+4)dk=\left[-\frac{\cancel{3}}{2}\frac{k^3}{\cancel{3}}+\frac{k^2}{2}+\frac{5}{2}k\right]_0^1+\left[-\cancel{2}\frac{k^2}{\cancel{2}}+4k\right]_1^2$

$=-\frac{1}{\cancel{2}}+\frac{1}{\cancel{2}}+\frac{5}{2}-\cancel{4}+\cancel{8}+1-\cancel{4}=\frac{7}{2}$