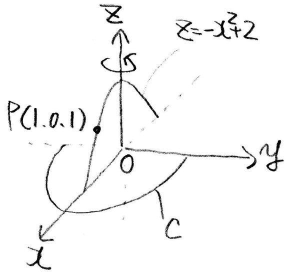
東大理科 1988前期 ⑤



$z=-x^2+2$ と $z=k$ $(0\leqq k\leqq 2)$ の交点の x 座標は, $k=-x^2+2$, $x=\pm\sqrt{2-k}$ より $\pm\sqrt{2-k}$ であるから

Vの方程式は $x^2+y^2=2-z$, $0\leqq z\leqq 2$

Pの座標は $(1, 0, 1)$ としてよい

PとC上の点 $(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ を通る直線の方程式は

$(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)+k(1-r\cos\theta, -r\sin\theta, 1)=\{(-r\cos\theta+1)k+r\cos\theta, -r\sin\theta\cdot k+r\sin\theta, k\}$

$\{(-r\cos\theta+1)k+r\cos\theta\}^2+(-r\sin\theta\cdot k+r\sin\theta)^2\geqq 2-k$ が成り立つとき

$(r^2\cos^2\theta-2r\cos\theta+1)k^2+(-2r^2\cos^2\theta+2r\cos\theta)k+r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\cdot k^2-2r^2\sin^2\theta\cdot k+r^2\sin^2\theta+k-2\geqq 0$

$(r^2-2r\cos\theta+1)k^2+(-2r^2+2r\cos\theta+1)k+r^2-2\geqq 0$

$(k-1)\{(r^2-2r\cos\theta+1)k-r^2+2\}\geqq 0$ ——①

$(r^2-2r\cos\theta+1)k-r^2+2$

$k-1\ \overline{)\,(r^2-2r\cos\theta+1)k^2+(-2r^2+2r\cos\theta+1)k+r^2-2}$

$(r^2-2r\cos\theta+1)k^2+(-r^2+2r\cos\theta-1)k$

$(-r^2+2)k+r^2-2$

$(-r^2+2)k+r^2-2$

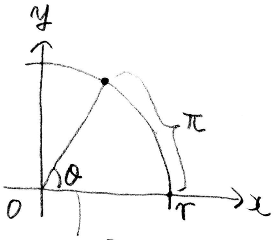
0

$0\leqq k\leqq 1$ で①が常に成り立つとき,

$f(k)=(r^2-2r\cos\theta+1)k-r^2+2$ として $0\leqq k\leqq 1$ で $f(k)\leqq 0$ であればよく,

$r^2-2r\cos\theta+1=r^2-2r(1+\cos\theta-1)+1=(r-1)^2+2r(1-\cos\theta)>0$ より $f(k)$ は単調増加であるから

$f(1)\leqq 0$, $\cancel{r^2}-2r\cos\theta+1-\cancel{r^2}+2\leqq 0$ $\cos\theta\geqq\frac{3}{2r}$ であればよい.



$\cos\theta=\frac{3}{2r}$

左図より $\frac{2\pi r}{2\pi}=\frac{\pi}{\theta}$, $r\theta=\pi$ ——② また $\cos\theta=\frac{3}{2r}$ ——③

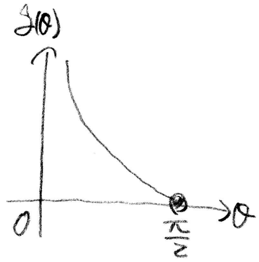
②③を満たす r, θ を求める

②③より $\frac{\theta}{\pi}=\frac{2\cos\theta}{3}$, $\frac{\cos\theta}{\theta}=\frac{3}{2\pi}$

$g(\theta)=\frac{\cos\theta}{\theta}$ $(0<\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ とすると

$g'(\theta)=\frac{-\sin\theta\cdot\theta-\cos\theta}{\theta^2}<0$ より $g(\theta)$ は単調減少

$g(\theta)$ のグラフは右図



よって $\frac{\cos\theta}{\theta}=\frac{3}{2\pi}$, $0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ を満たす θ はただ1つ存在して これは $\frac{\pi}{3}$

このとき $r=3$

以上より Cの半径は3であるから 求める長さは $6\pi-2\pi=4\pi$