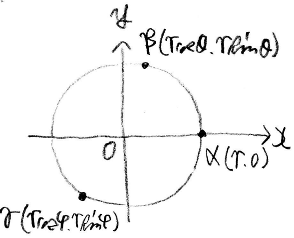
東大理科 1988前期 ⑥



xy平面上の中心(0, 0) 半径rの円を考え

この上に3点 $\alpha(r,0)$, $\beta(r\cos\theta, r\sin\theta)$ $(0<\theta\leqq\pi)$, $\gamma(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ $(-\pi<\varphi<\pi,\ \varphi\neq0,\ \varphi\neq\theta)$ をとる

$\overrightarrow{\alpha\beta}=(r\cos\theta-r,\ r\sin\theta)$, $\overrightarrow{\alpha\gamma}=(r\cos\varphi-r,\ r\sin\varphi)$ より

△αβγの面積は $\frac{1}{2}|r(\cos\theta-1)r\sin\varphi-r\sin\theta\, r(\cos\varphi-1)|=\frac{r^2}{2}|\cos\theta\sin\varphi-\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi+\sin\theta|$

$=\frac{r^2}{2}|-\sin(\theta-\varphi)-\sin\varphi+\sin\theta|=\frac{r^2}{2}\left|-2\sin\frac{\theta-\varphi+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi-\varphi}{2}+\sin\theta\right|=\frac{r^2}{2}\left|\sin\theta-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta-2\varphi}{2}\right|$ —①

※ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b$

$a+b=a'$, $a-b=b'$ とすると $a=\frac{a'+b'}{2}$, $b=\frac{a'-b'}{2}$

$\sin a'+\sin b'=2\sin\frac{a'+b'}{2}\cos\frac{a'-b'}{2}$

$-\pi<\theta-2\varphi<3\pi$ より $-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta-2\varphi}{2}<\frac{3}{2}\pi$ より $\cos\frac{\theta-2\varphi}{2}$ は $\frac{\theta-2\varphi}{2}=\pi$ のとき最小値 −1 をとる

$\frac{\theta-2\varphi}{2}=\pi$ のとき $\varphi=\frac{\theta-2\pi}{2}$, このようなφの値はθの値にかかわらず常に存在する

よってθの値を固定したときの①の最大値は $\frac{r^2}{2}\left|\sin\theta+2\sin\frac{\theta}{2}\right|$

$f(\theta)=\sin\theta+2\sin\frac{\theta}{2}$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする

$f'(\theta)=\cos\theta+2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}$, $f'(\theta)=0$ のとき $\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=0$, $2\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}-1=0$

$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=-1, \frac{1}{2}$, $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{3}$, $\theta=\frac{2}{3}\pi$

θ	0	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$f'(\theta)$		+	0	−	
$f(\theta)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	2

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+2\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

f(θ)の増減表は左表

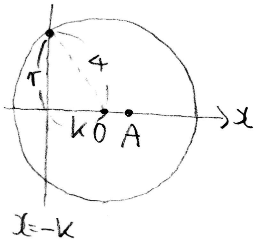
よって①は $\theta=\frac{2}{3}\pi$, $\varphi=\frac{\frac{2}{3}\pi-2\pi}{2}=-\frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ をとる

このとき△αβγは正三角形

xyz空間で考え O(0, 0, 0), A(1, 0, 0) とする

$x^3+y^3+z^3=4^3$ をある平面で切ったとき 切り口の円の半径がr $(0<r\leqq4)$ であるとする

このような平面のうちAからの距離が最大であるものは yz平面に平行で $x\leqq0$ の領域にあるものである



$x^3+y^3+z^3=4^3$ を $x=-k$ $(0\leqq k<4)$ で切ったとき 切り口の円に内接する正三角形の各頂点をB, C, Dとして このときの四面体ABCDの体積をV(k)とする

上記よりV(k)の最大値を求めればよい

※ $k^2+r^2=16$ より $r=\sqrt{16-k^2}$

左図より円の半径は $\sqrt{16-k^2}$ であるから

$V(k)=\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{4}(16-k^2)(k+1)\frac{1}{\cancel{3}}$

$V'(k)=\frac{\sqrt{3}}{4}(-3k^2-2k+16)$

$V'(k)=0$ のとき $3k^2+2k-16=0$ $k=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{3}=-\frac{8}{3}, 2$

k	0	…	2	…	4
$V'(k)$		+	0	−	
$V(k)$	$4\sqrt{3}$	↗	$9\sqrt{3}$	↘	0

V(k)の増減表は左図

よって求める値は $9\sqrt{3}$

※ $V(2)=\frac{\sqrt{3}}{\cancel{4}}\cancel{12}^{3}\cdot3$