東大理科　1990前期　⑥

$$\begin{array}{r} 0.123 \\ 333\overline{)410} \\ \underline{333} \\ 770 \\ \underline{666} \\ 1040 \\ \underline{999} \\ 410 \end{array}$$

(1) $\frac{41}{333}=0.123123\cdots$

$a_3 \leqq 0.123$ となる確率を $b_1$ とする。

$a_3=0.111, 0.112, 0.113, 0.114, 0.115, 0.116, 0.121, 0.122, 0.123$ のとき $a_3 \leqq 0.123$ となるから $b_1=\frac{9}{216}=\frac{1}{24}$

$a_{3n} \leqq \underbrace{0.123123\cdots123}_{n回123が続く}$ となる確率を $b_n$ とする。

$a_{3n}=0.123123\cdots123$ のとき、確率 $\frac{1}{24}$ で $a_{3(n+1)} \leqq 0.123123\cdots123123$ となる。

$a_{3n} \neq 0.123123\cdots123$ かつ $a_{3n} \leqq 0.123123\cdots123$ のとき、確率 $1$ で $a_{3(n+1)} \leqq 0.123123\cdots123123$ となる

よって $b_{n+1}=\frac{1}{216^n}\frac{1}{24}+b_n-\frac{1}{216^n}$ ,　$b_{n+1}=b_n-\frac{23}{24}\left(\frac{1}{216}\right)^n$

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1}-\frac{23}{24}\left(\frac{1}{216}\right)^{n-1} \\ b_{n-1} &= b_{n-2}-\frac{23}{24}\left(\frac{1}{216}\right)^{n-2} \\ &\vdots \\ +)\ b_2 &= b_1-\frac{23}{24}\left(\frac{1}{216}\right) \\ \hline b_n &= b_1-\frac{23}{24}\left\{\frac{1}{216}+\left(\frac{1}{216}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{216}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

$$b_n=\frac{1}{24}-\frac{23}{24}\frac{\frac{1}{216}\left\{1-\left(\frac{1}{216}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{216}}$$

$$\lim_{n\to\infty}p_n\left(\frac{41}{333}\right)=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{24}-\frac{23}{24}\frac{1}{215}$$

$$=\frac{1}{24}\frac{215-23}{215}=\frac{1}{\cancel{24}}\frac{\cancel{192}^{8}}{215}=\frac{8}{215}$$

(2) (i) $\alpha<0.366\cdots$ のとき

1回目4.5.6のどれかが出たとき、$a_n>\alpha$ ，この確率は $\frac{1}{2}$ —①

$\alpha<\beta<0.366\cdots$ を満たす有限な桁数の小数 $\beta$ が存在する

$n$ が $\beta$ の桁数より大きいとき、1回目に3が出て、かつ $a_n>\beta>\alpha$ となる確率は0より大きい —②

①②より $\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha)<\frac{1}{2}$

(ii) $\alpha \geqq 0.366\cdots$ のとき

1回目1.2.3のどれかが出たとき、$a_n \leqq \alpha$ この確率は $\frac{1}{2}$ —③

(ii-i) かつ $\alpha>0.411\cdots$ のとき

$\alpha>\beta>0.411\cdots$ を満たす有限な桁数の小数 $\beta$ が存在する

$n$ が $\beta$ の桁数より大きいとき、1回目に4が出て、かつ $a_n \leqq \beta<\alpha$ となる確率は0より大きい —④

③④より $\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha)>\frac{1}{2}$

(ii-ii) $\alpha=0.411\cdots$ のとき

1回目4が出て、かつ $a_n \leqq \alpha$ となるのは2回目から $n$ 回目まですべて1が出たときのみであり、この確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n$ —⑤

③⑤より $p_n(\alpha)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{6}\right)^n$ ，$\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha)=\frac{1}{2}$

(ii-iii) かつ $\alpha<0.411\cdots$ のとき

$\alpha<\beta<0.411\cdots$ を満たす有限な桁数の小数 $\beta$ が存在する

$n$ が $\beta$ の桁数より大きいとき、1回目に4.5.6のどれかが出て、かつ $a_n>\beta>\alpha$ となる確率は $1$ —⑥

③⑥より $\lim_{n\to\infty}p_n(\alpha)=\frac{1}{2}$

以上より $0.366\cdots \leqq \alpha \leqq 0.411\cdots$

$0.366\cdots=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\frac{2}{3}=\frac{9+2}{30}=\frac{11}{30}$ ，$0.411\cdots=\frac{2}{5}+\frac{1}{10}\frac{1}{9}=\frac{36+1}{90}=\frac{37}{90}$ より $\frac{11}{30} \leqq \alpha \leqq \frac{37}{90}$