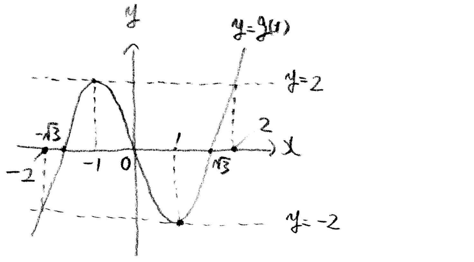
東大理科 1991前期 ③




(1) $g(x)=x^3-3x$ とする。$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$　$g'(x)=0$ のとき $x=\pm1$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-2$ | ↗ |

$g(x)$の増減表は左表
$g(x)$のグラフは右図

※ $x^3-3x=2$ のとき $x^3-3x-2=0$. $(x+1)^2(x-2)=0$
$x=-1, 2$
$x^3-3x=-2$ のとき $x^3-3x+2=0$　$(x-1)^2(x+2)=0$
$x=-2, 1$

(i) $p<-2$ または $p>2$ のとき. 右図より $f(p)>4$

(ii) $p=-2$ のとき 右図より. $f(p)=1(-2)=-2$, $p=2$のとき, 右図より $f(p)=2(-1)=-2$

(iii) $-2<p<2$ のとき　$x^3-3x-p=0$ は異なる3つの実数解を持つから
これを $\alpha, \beta, \gamma$ $(\alpha<\beta<\gamma)$ とする.

$x^3-3x-p=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$ より

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0 & \text{—①}\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3 & \text{—②}\\ \alpha\beta\gamma=p & \text{—③}\end{cases}$$

①③より $\alpha(-\alpha-\gamma)\gamma=p$. $-\alpha\gamma(\alpha+\gamma)=p$

よって②より $\alpha(-\alpha-\gamma)+(-\alpha-\gamma)\gamma+\gamma\alpha=-3$.　$-\alpha^2-\alpha\gamma-\alpha\gamma-\gamma^2+\gamma\alpha=-3$

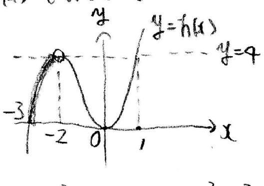
$-(\alpha+\gamma)^2+\alpha\gamma=-3$　$-\alpha^2\gamma^2(\alpha+\gamma)^2+\alpha^3\gamma^3=-3\alpha^2\gamma^2$.　$-p^2+\alpha^3\gamma^3=-3\alpha^2\gamma^2$

$\alpha^3\gamma^3+3\alpha^2\gamma^2=p^2$

$h(x)=x^3+3x^2$ とする. $h'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$　$h'(x)=0$ のとき $x=-2, 0$

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | ↗ | $4$ | ↘ | $0$ | ↗ |

$h(x)$の増減表は左表
$h(x)$のグラフは右図




※ $x^3+3x^2=4$ のとき $x^3+3x^2-4=0$
$(x+2)^2(x-1)=0$. $x=-2, 1$

$-2<p<0$ のとき $\alpha\gamma<\beta\gamma<\alpha\beta$
$p=0$ のとき $\alpha\gamma<\alpha\beta=\beta\gamma=0$
$0<p<2$ のとき $\alpha\gamma<\alpha\beta<\beta\gamma$
より. $\alpha\gamma$ は $y=p^2$ と左図の太線部の交点の $x$座標

$\alpha\gamma=f(p)$ より
このときの $f(p)$ の最小値は $-3$

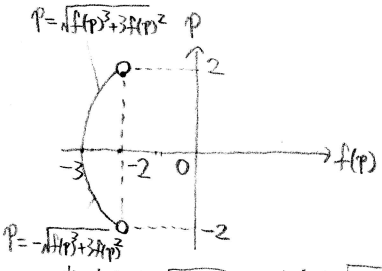
(i)(ii)(iii) より. $f(p)$の最小値は $-3$

(2) (i) $-2<p<2$ のとき (1)より $f(p)^3+3f(p)^2=p^2$　$0\leqq p<2$ のとき $p=\sqrt{f(p)^3+3f(p)^2}$
$-2<p<0$ のとき $p=-\sqrt{f(p)^3+3f(p)^2}$

$k(x)=\sqrt{x^3+3x^2}$ $(-3\leqq x<-2)$ とする. $k'(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{3x^2+6x}{\sqrt{x^3+3x^2}}=\dfrac{3}{2}\dfrac{x(x+2)}{\sqrt{x^3+3x^2}}>0$ より $k(x)$は単調増加

$$k''(x)=\frac{3}{2}\,\frac{(2x+2)\sqrt{x^3+3x^2}-(x^2+2x)\frac{1}{2}\frac{3x^2+6x}{\sqrt{x^3+3x^2}}}{x^3+3x^2}=\frac{3}{2}\,\frac{2(x+1)x^2(x+3)-\frac{3}{2}x^2(x+2)^2}{(x^3+3x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{3}{2}\,\frac{x^2(2x^2+8x+6-\frac{3}{2}x^2-6x-6)}{(x^3+3x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2}\,\frac{x^3(\frac{1}{2}x+2)}{(x^3+3x^2)^{\frac{3}{2}}}<0$$ より $k(x)$は上に凸




よって. このときの $f(p)$ と $p$ の関係は左図のようになる.

※ $k(-3)=\sqrt{-27+27}=0$. $k(-2)=\sqrt{-8+12}=2$

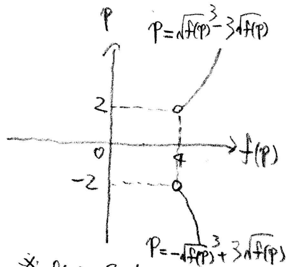
(ii) $p>2$ のとき (1)より $\sqrt{f(p)}^3-3\sqrt{f(p)}=p$
$p<-2$ のとき (1)より $\{-\sqrt{f(p)}\}^3-3\{-\sqrt{f(p)}\}=p$.
$-\sqrt{f(p)}^3+3\sqrt{f(p)}=p$

$l(x)=\sqrt{x}^3-3\sqrt{x}$ $(x>4)$ とする

$l'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}-3\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{3}{2}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}>0$ より
$l(x)$は単調増加

$l''(x)=\dfrac{3}{2}\dfrac{\sqrt{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{3}{2}\dfrac{x-\frac{1}{2}}{x^{\frac{3}{2}}}>0$ より
$l(x)$は下に凸

よって このときの $f(p)$ と $p$ の関係は
右図のようになる




※ $l(4)=8-6=2$

(iii) $p=2$ のとき (1)より $f(p)=-2$
$p=-2$ のとき (1)より $f(p)=-2$

(i)(ii)(iii) より $f(p)$のグラフは下図