東大理科　1991前期　④

(1) $\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$ であるから

$n=1$ のとき、ある多項式 $p_1(x)$, $q_1(x)$ が存在して、$\sin\theta=p_1(\tan\theta)\cos\theta$, $\cos\theta=q_1(\tan\theta)\cos\theta$ と書ける ―①

$n=k$ のときある多項式 $p_k(x)$, $q_k(x)$ が存在して、$\sin k\theta=p_k(\tan\theta)\cos^k\theta$, $\cos k\theta=q_k(\tan\theta)\cos^k\theta$ と書けると仮定する。

$\sin(k+1)\theta=\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta=p_k(\tan\theta)\cos^k\theta\cos\theta+q_k(\tan\theta)\cos^k\theta\sin\theta=\{p_k(\tan\theta)+q_k(\tan\theta)\tan\theta\}\cos^{k+1}\theta$

$\cos(k+1)\theta=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta=q_k(\tan\theta)\cos^k\theta\cos\theta-p_k(\tan\theta)\cos^k\theta\sin\theta=\{q_k(\tan\theta)-p_k(\tan\theta)\tan\theta\}\cos^{k+1}\theta$

よって $n=k+1$ のときある多項式 $p_{k+1}(x)$, $q_{k+1}(x)$ が存在して $\sin(k+1)\theta=p_{k+1}(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta$, $\cos(k+1)\theta=q_{k+1}(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta$ と書ける ―②

①②より数学的帰納法により、題意は示された。

(2) (1)より $n>1$ のとき $p_n(x)=p_{n-1}(x)+xq_{n-1}(x)$, $q_n(x)=q_{n-1}(x)-xp_{n-1}(x)$

$$\begin{array}{rl} & xp_n(x)=\cancel{xp_{n-1}(x)}+x^2q_{n-1}(x)\\ +) & q_n(x)=q_{n-1}(x)-\cancel{xp_{n-1}(x)}\\ \hline & xp_n(x)+q_n(x)=(x^2+1)q_{n-1}(x)\end{array}$$

$$q_{n-1}(x)=\frac{xp_n(x)+q_n(x)}{x^2+1} \quad ―③$$

$$\begin{array}{rl} & p_n(x)=p_{n-1}(x)+\cancel{xq_{n-1}(x)}\\ -) & xq_n(x)=\cancel{xq_{n-1}(x)}-x^2p_{n-1}(x)\\ \hline & p_n(x)-xq_n(x)=(x^2+1)p_{n-1}(x)\end{array}$$

$$p_{n-1}(x)=\frac{p_n(x)-xq_n(x)}{x^2+1} \quad ―④$$

$$(\tan\theta)'=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)'=\frac{\cos\theta\cdot\cos\theta+\sin\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\sin n\theta=p_n(\tan\theta)\cos^n\theta$ の両辺を θ で微分すると

$$\cos n\theta\cdot n=p_n'(\tan\theta)\frac{1}{\cos^2\theta}\cos^n\theta+p_n(\tan\theta)n\cos^{n-1}\theta\cdot(-\sin\theta)$$

$$q_n(\tan\theta)\cancel{\cos^n\theta}\cdot n=p_n'(\tan\theta)(\tan^2\theta+1)\cancel{\cos^n\theta}-p_n(\tan\theta)n\cancel{\cos^n\theta}\cdot\tan\theta$$

$$p_n'(\tan\theta)=n\frac{\tan\theta p_n(\tan\theta)+q_n(\tan\theta)}{\tan^2\theta+1}$$

③より $p_n'(\tan\theta)=nq_{n-1}(\tan\theta)$ ―⑤

ここで $\tan\theta$ の値は任意の実数を取り得るから ⑤が成立つならば $p_n'(x)=nq_{n-1}(x)$ である

$\cos n\theta=q_n(\tan\theta)\cos^n\theta$ の両辺を θ で微分すると

$$-\sin n\theta\cdot n=q_n'(\tan\theta)\frac{1}{\cos^2\theta}\cos^n\theta+q_n(\tan\theta)n\cos^{n-1}\theta(-\sin\theta)$$

$$-p_n(\tan\theta)\cancel{\cos^n\theta}\cdot n=q_n'(\tan\theta)(\tan^2\theta+1)\cancel{\cos^n\theta}-q_n(\tan\theta)n\cancel{\cos^n\theta}\tan\theta$$

$$q_n'(\tan\theta)=n\frac{-p_n(\tan\theta)+\tan\theta q_n(\tan\theta)}{\tan^2\theta+1}$$

④より $q_n'(\tan\theta)=-np_{n-1}(\tan\theta)$ ―⑥

ここで $\tan\theta$ の値は任意の実数を取り得るから ⑥が成立つならば $q_n'(x)=-np_{n-1}(x)$ である