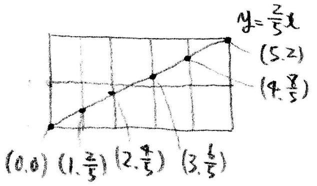
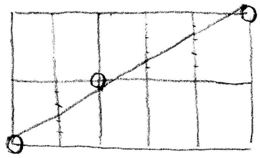
東大理科　1991前期　⑤



$y=\frac{2}{5}x$は上図のようになる

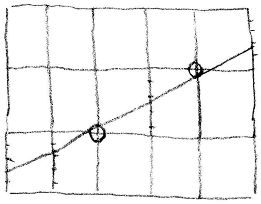
これをy軸の正の方向へ平行移動させていくことを考える

rは最小値Sであるとする



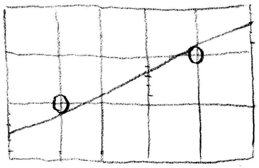
まず

中心(0.0). 半径S
中心(2.1). 半径S
中心(5.2). 半径S
の円に接する



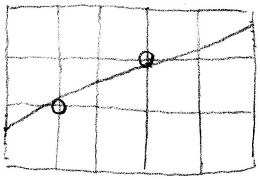
次に

中心(2.1). 半径S
中心(4.2) 半径S
の円に接する



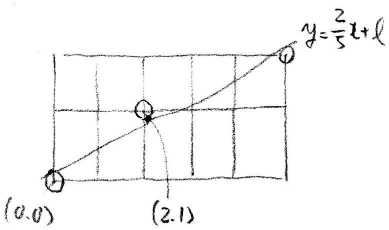
次に

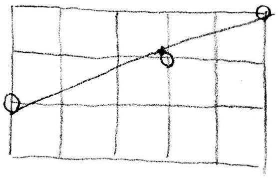
中心(1.1). 半径S
中心(4.2) 半径S
の円に接する



次に

中心(1.1). 半径S
中心(3.2) 半径S
の円に接する





次に

中心(0.1). 半径S
中心(3.2). 半径S
中心(5.3). 半径S
の円に接する

以降も対称性によりy軸の正の方向へ平行移動させていくとつねに円のどれかと共有点をもつ

$y=\frac{2}{5}x$をy軸の負の方向へ平行移動させていくときも対称性により同様に考えれば つねに円のどれかと共有点をもつことがわかる

よって(0.0).(2.1)からの距離がともにSである直線 $y=\frac{2}{5}x+l$を求めればよい.

$y=\frac{2}{5}x+l$の大きさが1の法線ベクトルは $\pm\left(1,-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{25}{4}}}=\pm\frac{2}{\sqrt{29}}\left(1,-\frac{5}{2}\right)$

(0.0)から直線へ下ろした垂線の足は $-\frac{2}{\sqrt{29}}S\left(1,-\frac{5}{2}\right)$と書ける

これが直線上にあるから $\frac{5}{\sqrt{29}}S=-\frac{4}{5\sqrt{29}}S+l$.　$l=\frac{25+4}{5\sqrt{29}}S=\frac{\sqrt{29}}{5}S$

(2.1)から直線へ下ろした垂線の足は $(2,1)+\frac{2}{\sqrt{29}}S\left(1,-\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{29}}S+2,-\frac{5}{\sqrt{29}}S+1\right)$と書ける

これが直線上にあるから $-\frac{5}{\sqrt{29}}S+\cancel{1}=-\frac{4}{5\sqrt{29}}S+\cancel{\frac{4}{5}}+\frac{\sqrt{29}}{5}S$.　$\frac{1}{\cancel{5}}=\frac{4+29+25}{\cancel{5}\sqrt{29}}S$.　$\frac{2\cdot\cancel{29}^{\sqrt{29}}}{\cancel{\sqrt{29}}}S=1$.　$S=\frac{1}{2\sqrt{29}}$