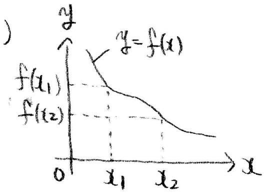
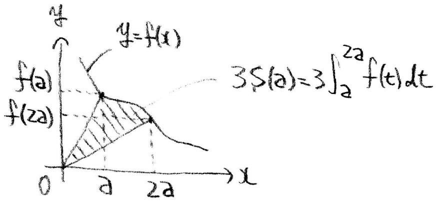
東大理科　1991前期　(6)

(1)



$S(1)=\int_1^2 f(t)dt$



右上図の斜線部の面積は $af(a)\frac{1}{2}+\int_a^{2a}f(x)dx-2af(2a)\frac{1}{2}=\frac{1}{2}af(a)-af(2a)+S(a)$

これが $3S(a)$ に等しいから $\frac{1}{2}af(a)-af(2a)+S(a)=3S(a)$　$f(a)-2f(2a)=\frac{4S(a)}{a}$

これが任意の $a>0$ に対して成立つから $f(x)-2f(2x)=\frac{4S(x)}{x}$ —①

微分すると $f(x)$ となる関数を $F(x)$ とすると、$S(x)=F(2x)-F(x)$.　$S'(x)=2f(2x)-f(x)$ —②

①②より $\frac{4S(x)}{x}=-S'(x)$，$f(x)>0$ より $S(x)>0$ より $\frac{S'(x)}{S(x)}=-\frac{4}{x}$，$\log S(x)=-4\log x+C$　(Cは積分定数)

$S(1)=1$ より $C=0$.　$\log S(x)=\log\frac{1}{x^4}$，$S(x)=\frac{1}{x^4}$.　①より $f(x)-2f(2x)=\frac{4}{x^5}$ —③

(2) ③より $f(2^nx)-2f(2^{n+1}x)=\frac{4}{32^n\cdot x^5}$，$2^nf(2^nx)-2^{n+1}f(2^{n+1}x)=\frac{4}{16^nx^5}$　$32^nf(2^nx)-\frac{1}{16}32^{n+1}f(2^{n+1}x)=\frac{4}{x^5}$

$g_n(x)=32^nf(2^nx)$ とおくと.　$g_n(x)-\frac{1}{16}g_{n+1}(x)=\frac{4}{x^5}$.　$g_{n+1}(x)=16g_n(x)-\frac{64}{x^5}$　　$g=16g-\frac{64}{x^5}$　$g=\frac{64}{15}\frac{1}{x^5}$

$n\geqq 2$ のとき $g_n(x)-\frac{64}{15}\frac{1}{x^5}=16\left\{g_{n-1}(x)-\frac{64}{15}\frac{1}{x^5}\right\}=\cdots=16^{n-1}\left\{g_1(x)-\frac{64}{15}\frac{1}{x^5}\right\}=16^{n-1}\left\{32f(2x)-\frac{64}{15}\frac{1}{x^5}\right\}$

$g_n(x)=2\cdot 16^nf(2x)-\frac{4}{15}16^n\frac{1}{x^5}+\frac{64}{15}\frac{1}{x^5}$.　$2^nf(2^nx)=2f(2x)-\frac{4}{15}\frac{1}{x^5}+\frac{1}{16^n}\frac{64}{15}\frac{1}{x^5}=f(x)-\frac{64}{15}\frac{1}{x^5}+\frac{1}{16^n}\frac{64}{15}\frac{1}{x^5}$

$a(x)=\lim_{n\to\infty}2^nf(2^nx)=f(x)-\frac{64}{15}\frac{1}{x^5}$

$\int_x^{2x}a(t)dt=\int_x^{2x}\left\{f(t)-\frac{64}{15}\frac{1}{t^5}\right\}dt=S(x)-\frac{64}{15}\left[-\frac{t^{-4}}{4}\right]_x^{2x}=\frac{1}{x^4}+\frac{16}{15}\left(\frac{1}{16}\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^4}\right)=0$

(3) $f(x)>0$ より $2^nf(2^nx)>0$ より $a(x)=\lim_{n\to\infty}2^nf(2^nx)\geqq 0$

ところで $\int_x^{2x}a(t)dt=0$ であるから $a(x)=0$，$f(x)=\frac{64}{15}\frac{1}{x^5}$