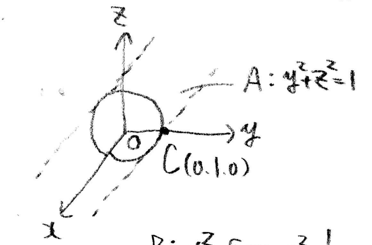
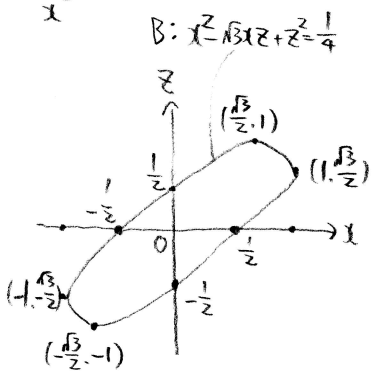
東大理科　1992前期 ④





$z^2-\sqrt{3}xz+x^2-\frac{1}{4}=0$ より $z=\dfrac{\sqrt{3}x\pm\sqrt{3x^2-4(x^2-\frac{1}{4})}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}x\pm\sqrt{1-x^2}}{2}$ よって $-1\leqq x\leqq 1$ のとき z が存在

$f(x)=\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ とすると $f'(x)=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$　$f'(x)=0$ のとき $3=\frac{x^2}{1-x^2}$　$4x^2=3$

$x>0$ より $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

x	-1	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\sqrt{3}$	↗	2	↘	$\sqrt{3}$

$f(x)$ の増減表は左表

※ $f(\frac{\sqrt{3}}{2})=\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{1-\frac{3}{4}}=2$

$g(x)=\sqrt{3}x-\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ とすると $g'(x)=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$　$g'(x)=0$ のとき $3=\frac{x^2}{1-x^2}$　$4x^2=3$

$x<0$ より $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\sqrt{3}$	↘	-2	↗	$\sqrt{3}$

$g(x)$ の増減表は左表

※ $g(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{1-\frac{3}{4}}=-2$

$f(x)=0$ のとき $3x^2=1-x^2$　$x^2=\frac{1}{4}$　$x<0$ より $x=-\frac{1}{2}$

※ $g(x)=0$ のとき $3x^2=1-x^2$　$x^2=\frac{1}{4}$　$x>0$ より $x=\frac{1}{2}$

よって Bは左図のようになる

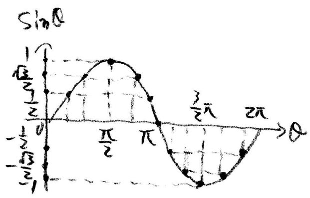
A上の x 軸と平行な直線 $(y,z)=(\cos\theta,\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とBの交点は

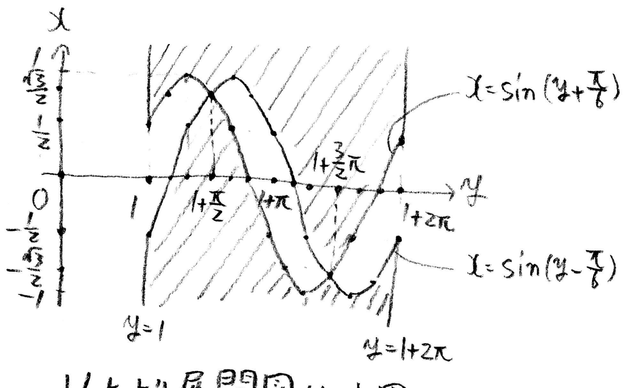
$x^2-\sqrt{3}x\sin\theta+\sin^2\theta=\frac{1}{4}$,　$x=\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta\pm\sqrt{3\sin^2\theta-4(\sin^2\theta-\frac{1}{4})}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta}}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi\leqq\theta<2\pi$ のとき $x=\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta\pm\cos\theta}{2}$,　$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$ のとき $x=\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta\mp\cos\theta}{2}$ より

$\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta\pm\cos\theta}{2}=\sin\theta\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\cos\theta\frac{1}{2}=\sin(\theta\pm\frac{\pi}{6})$

$(0,1,0)$ と $(0,\cos\theta,\sin\theta)$ を結ぶ円弧の長さは θ





以上より展開図は上図