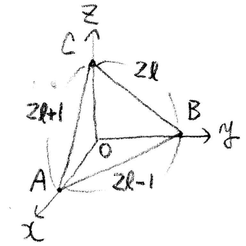
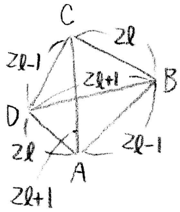
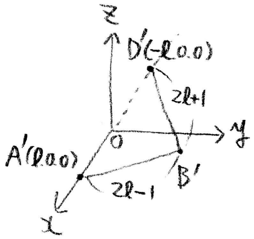
東大理科 1993前期 ①





すべての面が合同であるから

AD$=2l$, BD$=2l+1$, CD$=2l-1$



A'$(l,0,0)$, D'$(-l,0,0)$ として, △A'B'D'が xy平面上にあり

B'が $y>0$ の領域, C'が $z>0$ の領域にあり

A'B'$=2l-1$, B'D'$=2l+1$ A'C'$=2l+1$, B'C'$=2l$ C'D'$=2l-1$

である四面体 A'B'C'D' を考えると, これの体積は $V(l)$ に等しい

B'は中心A' 半径 $2l-1$ の円と, 中心D' 半径 $2l+1$ の円の交点にあるから

$$\begin{cases}(x-l)^2+y^2=(2l-1)^2\\(x+l)^2+y^2=(2l+1)^2\end{cases}$$

$(x+l-2l)^2+y^2=(2l+1-2)^2$ $\quad \cancel{(x+l)^2}-4l(x+l)+4l^2+\cancel{y^2}=\cancel{(2l+1)^2}-4(2l+1)+4$

$-4lx-\cancel{4l^2}+\cancel{4l^2}=-8l-\cancel{4}+\cancel{4}$ $\quad x=2$

$(2-l)^2+y^2=(2l-1)^2$. $4-4l+l^2+y^2=4l^2-4l+1$. $y^2=3l^2-3$. $y>0$より $y=\sqrt{3l^2-3}$

よって B'の座標は $(2,\sqrt{3l^2-3},0)$

C'は中心A' 半径 $2l+1$ の球, 中心B' 半径 $2l$ の球, 中心D' 半径 $2l-1$ の球の交点にあるから

$$\begin{cases}(x-l)^2+y^2+z^2=(2l+1)^2\\(x+l)^2+y^2+z^2=(2l-1)^2\\(x-2)^2+(y-\sqrt{3l^2-3})^2+z^2=4l^2\end{cases}$$

$(x+l-2l)^2+y^2+z^2=(2l-1+2)^2$ $\quad \cancel{(x+l)^2}-4l(x+l)+4l^2+\cancel{y^2+z^2}=\cancel{(2l-1)^2}+4(2l-1)+4$

$-4lx-\cancel{4l^2}+\cancel{4l^2}=8l-\cancel{4}+\cancel{4}$ $\quad x=-2$

$(-2-l)^2+y^2+z^2=(2l+1)^2$ $\quad 4+\cancel{4l}+l^2+y^2+z^2=4l^2+\cancel{4l}+1$ $\quad y^2+z^2=3l^2-3$

$(-2-2)^2+(y-\sqrt{3l^2-3})^2+z^2=4l^2$

$16+y^2-2\sqrt{3l^2-3}\,y+3l^2-3+z^2=4l^2$

$13-l^2-2\sqrt{3l^2-3}\,y+3l^2-3=0$

$2\sqrt{3l^2-3}\,y=2l^2+10$. $y=\dfrac{l^2+5}{\sqrt{3l^2-3}}$

$\dfrac{l^4+10l^2+25}{3l^2-3}+z^2=\dfrac{9l^4-18l^2+9}{3l^2-3}$

$z^2=\dfrac{9l^4-18l^2+9-l^4-10l^2-25}{3l^2-3}=\dfrac{8l^4-28l^2-16}{3l^2-3}$

$=\dfrac{4(2l^4-7l^2-4)}{3l^2-3}=\dfrac{4(l^2-4)(2l^2+1)}{3l^2-3}=\dfrac{4(l-2)(l+2)(2l^2+1)}{3l^2-3}$

よって C'の z座標は

$z>0$より $2\sqrt{\dfrac{(l-2)(l+2)(2l^2+1)}{3l^2-3}}$

※ $2l^4-7l^2-4=0$ のとき $l^2=\dfrac{7\pm\sqrt{49+32}}{4}=\dfrac{7\pm9}{4}=4,\ -\dfrac{1}{2}$

ゆえに $V(l)=\cancel{2}l\cancel{\sqrt{3l^2-3}}\,\dfrac{1}{\cancel{2}}\,2\sqrt{\dfrac{(l-2)(l+2)(2l^2+1)}{\cancel{3l^2-3}}}\,\dfrac{1}{3}=\dfrac{2l}{3}\sqrt{(l-2)(l+2)(2l^2+1)}$

$\displaystyle\lim_{l\to2}\frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}=\lim_{l\to2}\frac{2l}{3}\sqrt{(l+2)(2l^2+1)}=\frac{4}{3}\sqrt{4\cdot9}=8$

※補足 すべての面が合同な四面体の体積を求めることはできるが

そのためには座標を再設定する必要がある