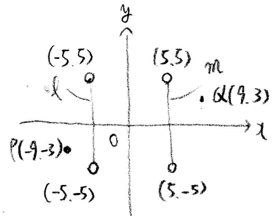
東大理科 1993前期 ③

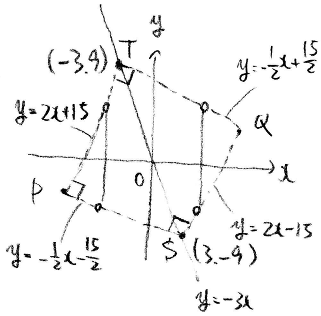


(x,y)がPからの距離とQからの距離が等しいとき

$(x+9)^2+(y+3)^2=(x-9)^2+(y-3)^2$. $x^2+18x+81+y^2+6y+9=x^2-18x+81+y^2-6y+9$

$12y=-36x$　$y=-3x$

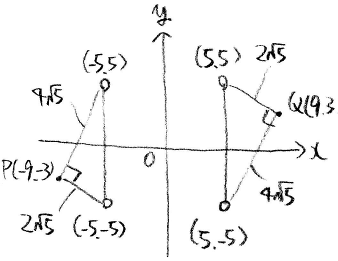
S(3,-9), T(-3,9)とすると
四角形PSQTの外側にある点は
P,Qとl,mと交わらない1つの線分で
結ぶことができる
よって、四角形PSQTの外側では
Rは $y=-3x$ 上にある



Pと(-5,5)を通る直線の方程式は $y-5=2(x+5)$
Pと(-5,-5)を通る直線の方程式は $y+5=-\frac{1}{2}(x+5)$
Qと(5,5)を通る直線の方程式は $y-5=-\frac{1}{2}(x-5)$
Qと(5,-5)を通る直線の方程式は $y+5=2(x-5)$

$y=2x+15$と $y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$ の交点の座標は
$2x+15=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$　$\frac{5}{2}x=-\frac{15}{2}$, $x=-3$, $y=9$ より $(-3,9)$

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{15}{2}$ と $y=2x-15$ の交点の座標は
$-\frac{1}{2}x-\frac{15}{2}=2x-15$, $\frac{5}{2}x=\frac{15}{2}$ $x=3$, $y=-9$ より $(3,-9)$



中心(5,5), 半径 $r+2\sqrt5$ の円と、
中心(-5,5) 半径rの円は

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-5)^2=(r+2\sqrt5)^2\\(x+5)^2+(y-5)^2=r^2\end{cases}$$

$(x+5-10)^2+(y-5)^2=(r+2\sqrt5)^2$

$\cancel{(x+5)^2}-20(x+5)+100+\cancel{(y-5)^2}=\cancel{r^2}+4\sqrt5r+20$

$-20x=4\sqrt5r+20$, $x=-\frac{r}{\sqrt5}-1$

$\left(-\frac{r}{\sqrt5}-1+5\right)^2+(y-5)^2=r^2$　$\frac{r^2}{5}-8\frac{r}{\sqrt5}+16+y^2-10y+25=r^2$, $y^2-10y-\frac{4}{5}r^2-\frac{8}{\sqrt5}r+41=0$

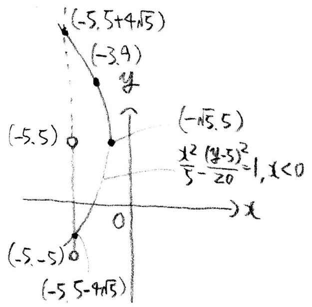
$y=5\pm\sqrt{25+\frac{4}{5}r^2+\frac{8}{\sqrt5}r-41}=5\pm\sqrt{\frac{4}{5}\left(r^2+\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{\sqrt5}r+5\right)-4-16}=5\pm\sqrt{\frac{4}{5}(r+\sqrt5)^2-20}$ より

$\frac{4}{5}(r+\sqrt5)^2\geqq20$, $r+\sqrt5\geqq5$, $r\geqq5-\sqrt5$ のとき交点 $\left(-\frac{r}{\sqrt5}-1,\ 5\pm\sqrt{\frac{4}{5}(r+\sqrt5)^2-20}\right)$ をもつ

これは $y=5\pm\sqrt{\frac{4}{5}\left\{-\sqrt5\left(-\frac{r}{\sqrt5}-1\right)\right\}^2-20}=5\pm\sqrt{4x^2-20}$　$y-5=\pm\sqrt{4x^2-20}$, $(y-5)^2=4x^2-20$

$\frac{x^2}{5}-\frac{(y-5)^2}{20}=1$ より 双曲線 $\frac{x^2}{5}-\frac{(y-5)^2}{20}=1$ の $x<0$の部分にある点である

$\frac{x^2}{5}-\frac{(y-5)^2}{20}=1$, $x<0$ のグラフは左図

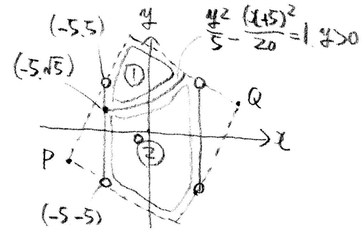


※ $x=-5$のとき $\frac{25}{5}-\frac{(y-5)^2}{20}=1$

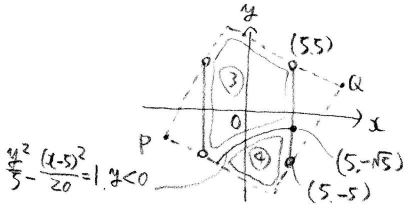
$100-(y-5)^2=20$　$y^2-10y+25-80=0$

$y=5\pm\sqrt{25+55}=5\pm4\sqrt5$

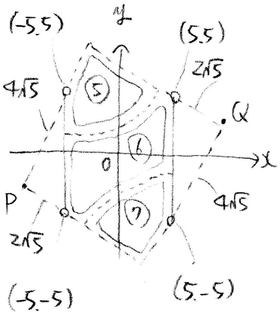
$\frac{(-3)^2}{5}-\frac{(9-5)^2}{20}=\frac{9}{5}-\frac{16}{20}=1$



対称性より
Rが①にあるとき d(P,R)の経路は(-5,5)を通り
Rが②にあるとき d(P,R)の経路は(-5,-5)を通る



対称性より
Rが③にあるとき d(Q,R)の経路は(5,5)を通り
Rが④にあるとき d(Q,R)の経路は(5,-5)を通る

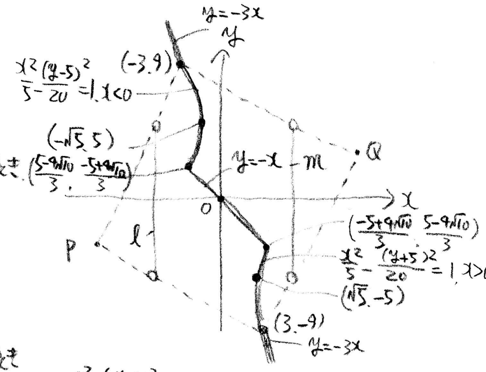


Rが⑤にあるとき d(P,R)=d(Q,R)となるのは
Rが中心(-5,5)半径rの円と、中心(5,5)半径$r+2\sqrt5$の円の交点にあるとき

Rが⑥にあるとき d(P,R)=d(Q,R)となるのは
$(x+5)^2+(y+5)^2=(x-5)^2+(y-5)^2$　$10x+10y=-10x-10y$, $y=-x$ より
Rが $y=-x$ 上にあるとき

Rが⑦にあるとき d(P,R)=d(Q,R)となるのは
Rが中心(-5,-5)半径$r+2\sqrt5$の円と、中心(5,-5)半径rの円の交点にあるとき

以上より点Rの軌跡は右図の太線部



※ $\frac{x^2}{5}-\frac{(-x-5)^2}{20}=1$　$4x^2-x^2-10x-25=20$, $3x^2-10x-45=0$

$x=\frac{5\pm\sqrt{25+135}}{3}=\frac{5\pm\sqrt{160}}{3}=\frac{5\pm4\sqrt{10}}{3}$　$x<0$より $x=\frac{5-4\sqrt{10}}{3}$