東大文科　1994前期　③

$$A\vec{u}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1+2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta+\sin\theta\\ \cos\theta+(1+2a)\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$|A\vec{u}|^2=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta+2(1+2a)\sin\theta\cos\theta+(1+4a+4a^2)\sin^2\theta=2+(2+2a)\sin2\theta+\overset{2}{\cancel{4}}a(a+1)\frac{1-\cos2\theta}{\cancel{2}}$$

$$=2a^2+2a+2+2(a+1)(\sin2\theta-a\cos2\theta)=2a^2+2a+2+2(a+1)\sqrt{a^2+1}\left(\sin2\theta\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}-\cos2\theta\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right)$$

φは $\sin\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$, $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$, $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす値として、$|A\vec{u}|^2=2a^2+2a+2+2(a+1)\sqrt{a^2+1}\sin(2\theta-\varphi)$

よって $2a^2+2a+2-2(a+1)\sqrt{a^2+1}\leqq|A\vec{u}|^2\leqq2a^2+2a+2+2(a+1)\sqrt{a^2+1}$ —①

与式は $(6-4\sqrt{2})a^2\leqq|A\vec{u}|^2\leqq6+4\sqrt{2}$ —② となる。

$a\leqq1$より $2a^2+2a+2+2(a+1)\sqrt{a^2+1}\leqq2+2+2+2\cdot2\sqrt{2}=6+4\sqrt{2}$ —③

$$a^2+a+1-(a+1)\sqrt{a^2+1}=\left\{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\left(1+\frac{1}{a}\right)\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}\right\}a^2$$

$f(x)=x^2+x+1-(x+1)\sqrt{x^2+1}$　$(x\geqq1)$ とすると

$$f'(x)=2x+1-\sqrt{x^2+1}-(x+1)\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2+1}-x^2-1-x^2-x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2+1}-(2x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$(2x+1)\sqrt{x^2+1}>0$, $2x^2+x+1>0$ より

$$\left\{(2x+1)\sqrt{x^2+1}\right\}^2-(2x^2+x+1)^2=(4x^2+4x+1)(x^2+1)-(4x^4+x^2+1+4x^3+4x^2+2x)$$

$=4x^4+4x^2+4x^3+4x+x^2+1-4x^4-4x^3-5x^2-2x-1=2x>0$ より

$f'(x)>0$. $f(x)$は単調増加. $f(x)$は $x=1$ のとき最小値 $3-2\sqrt{2}$ をとる.

よって $2a^2+2a+2-2(a+1)\sqrt{a^2+1}=2\left\{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\left(1+\frac{1}{a}\right)\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}\right\}a^2\geqq(6-4\sqrt{2})a^2$ —④

①③④より　$(6-4\sqrt{2})a^2\leqq|A\vec{u}|^2\leqq6+4\sqrt{2}$ —⑤

②⑤より題意は示された.