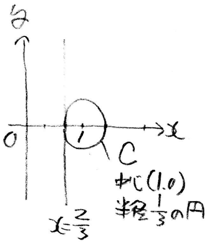
東大理科　1996前期　①

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$ であるから

fは$\sqrt{a^2+b^2}$倍して、$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たすθだけ回転する1次変換である。



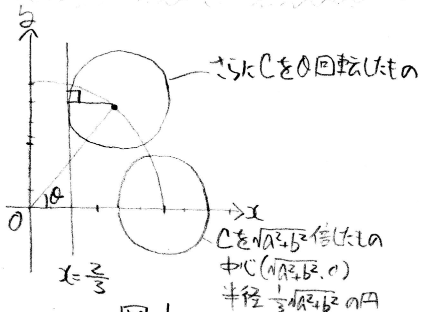




図1

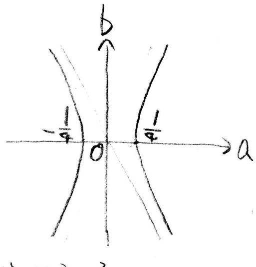
(i) $\sqrt{a^2+b^2}>1$ のとき

左図より $\cos\theta=\dfrac{\frac23+\frac13\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であるから

$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\frac23+\frac13\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $3a-2=\sqrt{a^2+b^2}$

$9a^2-12a+4=a^2+b^2$, $8(a^2-\frac32a+\frac9{16})-\frac92+4-b^2=0$

$8(a-\frac34)^2-b^2=\frac12$, $16(a-\frac34)^2-2b^2=1$




これは原点を中心、
漸近線が$16a^2-2b^2=0$, $b=\pm2\sqrt2a$である双曲線を
a軸方向に$\frac34$平行移動したものである

図1より、このときのa, bの取り得る値は
図2の太線部である

※ $16a^2-2b^2=1$において
$b=0$のとき $a^2=\frac1{16}$, $a=\pm\frac14$

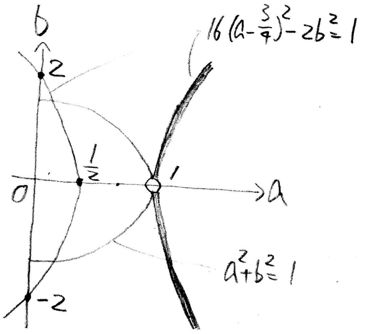



図2

※ $16a^2-2b^2=1$ において
$a=-\frac34$のとき $9-2b^2=1$, $b=\pm2$

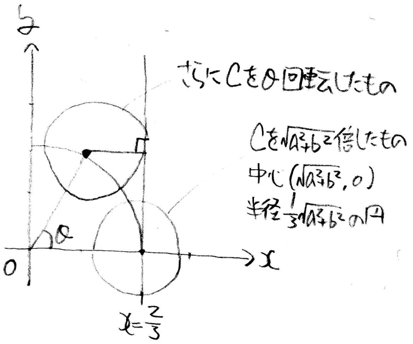



図3

(ii) $\frac12\leqq\sqrt{a^2+b^2}<1$ のとき

左図より $\cos\theta=\dfrac{\frac23-\frac13\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ であるから

$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\frac23-\frac13\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$　$3a-2=-\sqrt{a^2+b^2}$

$9a^2-12a+4=a^2+b^2$, $8(a^2-\frac32a+\frac9{16})-\frac92+4-b^2=0$

$8(a-\frac34)^2-b^2=\frac12$, $16(a-\frac34)^2-2b^2=1$

図3より、このときのa, bの取り得る値は
図4の太線部である

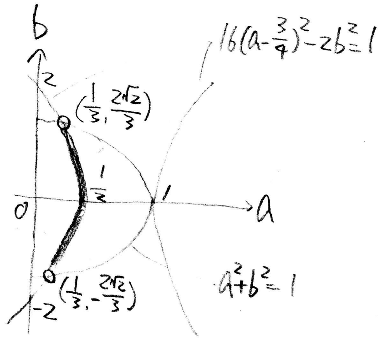



図4

※ $a^2+b^2=1$と$8a^2-12a+4=b^2$の交点は

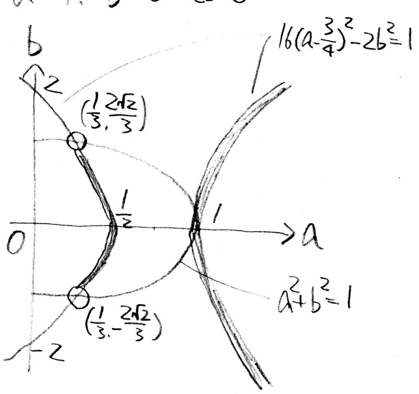
$8a^2-12a+4=-a^2+1$, $9a^2-12a+3=0$

$3a^2-4a+1=0$, $a=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\frac{2\pm1}{3}=\frac13, 1$

$b=\pm\frac{2\sqrt2}{3}, 0$

(iii) $\sqrt{a^2+b^2}=1$ のとき

$a=1$, $b=0$ である




(i)(ii)(iii)よりa, bの取り得る値は
左図の太線部である