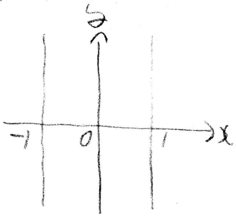
東大理科　1996前期　②

$x^2-(a+d)x+ad-bc=0$ が $-1<x<1$ の範囲に異なる2つの実数解を持つ条件を求める.



$x^2-(a+d)x+ad-bc=x^2-(a+d)x+\frac{(a+d)^2}{4}-\frac{(a+d)^2}{4}+ad-bc=\left(x-\frac{a+d}{2}\right)^2-\frac{(a+d)^2}{4}+ad-bc$ であるから.

$$\left.\begin{array}{l} -1<\frac{a+d}{2}<1 \quad \text{―①} \\ -\frac{(a+d)^2}{4}+ad-bc<0 \quad \text{―②} \\ 1+a+d+ad-bc>0 \quad \text{―③} \\ 1-(a+d)+ad-bc>0 \quad \text{―④} \end{array}\right\}$$ が成立てばよい.

$s(1-a)-tb>0$ をみたす正の数 s, t が存在するためには

$1-a>0$. $a<1$ でなければならない. ここで $a>0$ であるから $0<a<1$ ―⑤

$-sc+t(1-d)>0$ をみたす正の数 s, t が存在するためには

$1-d>0$. $d<1$ でなければならない. ここで $d>0$ であるから $0<d<1$ ―⑥

⑤⑥より $0<\frac{a+d}{2}<1$ よって①は成立つ.

$-\frac{(a+d)^2}{4}+ad-bc=-\frac{a^2+2ad+d^2-4ad}{4}-bc=-\frac{(a-d)^2}{4}-bc<0$. よって②は成立つ.

s, t は $s(1-a)-tb>0$, $-sc+t(1-d)>0$ を同時にみたす とする

$sc<t(1-d)$, $s<\frac{t(1-d)}{c}$ であるから $\frac{t(1-d)}{c}(1-a)-tb>s(1-a)-tb>0$

$\frac{1-d}{c}(1-a)-b>0$. $(1-d)(1-a)-bc>0$. $1-(a+d)+ad-bc>0$ よって④は成立つ.

これより $1-(a+d)+ad-bc+2(a+d)>2(a+d)$. $1+a+d+ad-bc>2(a+d)>0$ よって③は成立つ.

以上より①②③④が成立つから. $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$ は $-1<x<1$ の範囲に異なる2つの実数解を持つ.