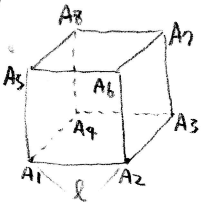
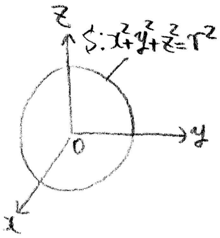
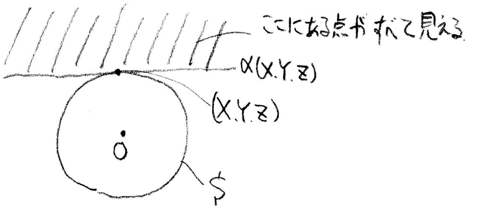
東大理科 1996前期 ③

(1)







xyz空間で考える

$m=\frac{l}{2}$として、$A_1, A_2 \cdots A_8$の座標を
$(m,-m,-m)$, $(m,m,-m)$, $(-m,m,-m)$, $(-m,-m,-m)$
$(m,-m,m)$, (m,m,m), $(-m,m,m)$, $(-m,-m,m)$ とする

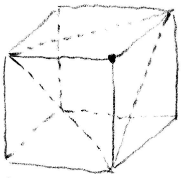
S上の点(X,Y,Z)でSに接する平面を$\alpha(X,Y,Z)$とすると、
(X,Y,Z)からは、$\alpha(X,Y,Z)$上の点と、$\alpha(X,Y,Z)$に対してOが含まれない側にある点がすべて見える

$r>m$のとき、S上の点$(0,0,r)$からは、$A_1, A_2 \cdots A_8$が見えないから
$r \leqq m$でなければならない

$r \leqq m$のとき、S上の$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$の領域にある点からは
A_6が見える
対称性より他の領域についても同様に考えれば
S上のすべての点から$A_1, A_2 \cdots A_8$のうち少なくとも1点が見える

よって、$r \leqq \frac{l}{2}$

(2)



S上の点$\left(\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}\right)$に接する平面の方程式は $x-\frac{r}{\sqrt{3}}+y-\frac{r}{\sqrt{3}}+z-\frac{r}{\sqrt{3}}=0$, $x+y+z=\sqrt{3}r$

これがA_2を通るとき $m+m-m=\sqrt{3}r$ $r=\frac{m}{\sqrt{3}}$

$r>\frac{m}{\sqrt{3}}$のとき、S上の点$\left(\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}\right)$からは$A_6$しか見えないから $r \leqq \frac{m}{\sqrt{3}}$でなければならない

$r \leqq \frac{m}{\sqrt{3}}$のとき、$S$上の$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$の領域にある点からは、A_6が見え、
また、A_2, A_5, A_7のうち少なくとも1点が見える
対称性より他の領域についても同様に考えれば
S上のすべての点から$A_1, A_2 \cdots A_8$のうち少なくとも2点が見える

よって $r \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}l$

※補足
論証の問題？
rが小さくなっていくと、どこで少なくとも1点が見えるようになるか？
さらにrが小さくなっていくと、どこで少なくとも2点が見えるようになるか？
まずS上の特定の点について考える