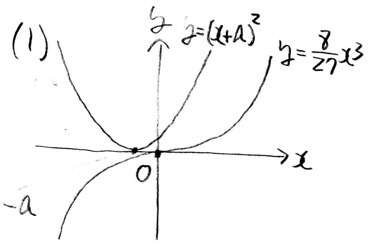
東大理科　1997前期　⑥

(1)



$y=\frac{8}{27}x^3$ 上の点 $(t,\frac{8}{27}t^3)$ における接線の方程式は $y-\frac{8}{27}t^3=\frac{8}{9}t^2(x-t)$

これと $y=(x+a)^2$ の交点のx座標は

xについての2次方程式　$(x+a)^2=\frac{8}{9}t^2x-\frac{8}{9}t^3+\frac{8}{27}t^3$

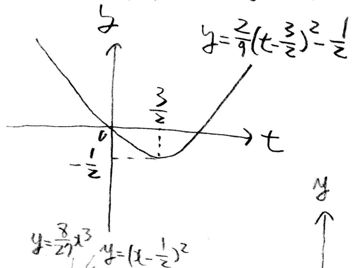
$x^2+2ax+a^2=\frac{8}{9}t^2x-\frac{16}{27}t^3$．$x^2+2(a-\frac{4}{9}t^2)x+a^2+\frac{16}{27}t^3=0$ の解である．

これが重解を持つとき．$\cancel{a^2}-\frac{8}{9}at^2+\frac{16}{81}t^4-\cancel{a^2}-\frac{16}{27}t^3=0$　$(t^2-3t-\frac{9}{2}a)t^2=0$

$(\frac{2}{9}t^2-\frac{2}{3}t-a)t^2=0$．　よって$t$についての2次方程式 $\frac{2}{9}t^2-\frac{2}{3}t-a=0$ が異なる2つの0以外の実数解を持てばよい．

$\frac{2}{9}t^2-\frac{2}{3}t=\frac{2}{9}(t^2-3t+\frac{9}{4})-\frac{1}{2}=\frac{2}{9}(t-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}$ であるから

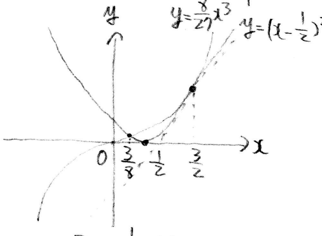
$y=\frac{2}{9}(t-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}$ のグラフは右図のようになる．



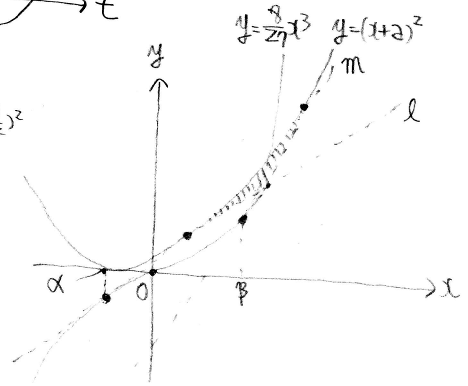
よって．$a>-\frac{1}{2}$　ただし $a\neq 0$

(2) ※ $\frac{8}{27}x^3=(x-\frac{1}{2})^2$　$x^3-\frac{27}{8}x^2+\frac{27}{8}x-\frac{27}{32}=0$　$(x-\frac{3}{2})^2(x-\frac{3}{8})=0$

$$\begin{array}{r|l} & x-\frac{3}{8} \\ x^2-3x+\frac{9}{4} & x^3-\frac{27}{8}x^2+\frac{27}{8}x-\frac{27}{32} \\ & x^3-3x^2+\frac{9}{4}x \\ & -\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{8}x-\frac{27}{32} \\ & -\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{8}x-\frac{27}{32} \\ & 0 \end{array}$$



$a=-\frac{1}{2}$のとき



右上図の斜線部の面積を求めればよい．右上図のようにl, mとする

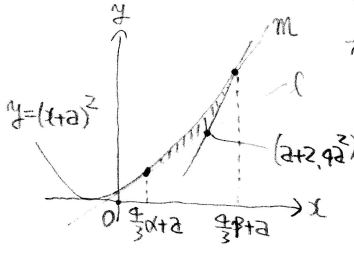
$t^2-3t-\frac{9}{2}a=0$は異なる2つの実数解を持つから．これをα, β $(\alpha<\beta)$とする　$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=-\frac{9}{2}a$

lは $y=\frac{8}{27}x$ と $x=\alpha$ で接するから．lの方程式は　$y-\frac{8}{27}\alpha^3=\frac{8}{9}\alpha^2(x-\alpha)$．$y=\frac{8}{9}(3\alpha+\frac{9}{2}a)x-\frac{16}{27}(3\alpha+\frac{9}{2}a)\alpha$．$y=(\frac{8}{3}\alpha+4a)x-\frac{16}{9}(3\alpha+\frac{9}{2}a)-\frac{8}{3}a\alpha$

$y=4(\frac{2}{3}\alpha+a)x-\frac{16}{3}\alpha-8a-\frac{8}{3}a\alpha$．$y=4(\frac{2}{3}\alpha+a)x-8(\frac{2}{3}\alpha+a+\frac{1}{3}a\alpha)$

ところで $y=(x+a)^2$ の傾きが $4(\frac{2}{3}\alpha+a)$ となるのは．$2(x+a)=4(\frac{2}{3}\alpha+a)$　$x=\frac{4}{3}\alpha+a$ のときであるから．lは $y=(x+a)^2$ と $x=\frac{4}{3}\alpha+a$ で接する．

同様にして．mの方程式は　$y=4(\frac{2}{3}\beta+a)x-8(\frac{2}{3}\beta+a+\frac{1}{3}a\beta)$　mは $y=(x+a)^2$ と $x=\frac{4}{3}\beta+a$ で接する



左図の斜線部の面積を求めればよい

※ $(\beta-\alpha)^3=\beta^3-3\beta^2\alpha+3\beta\alpha^2-\alpha^3$ より

$\beta^3-\alpha^3=(\beta-\alpha)^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2$

$\int_{\frac{4}{3}\alpha+a}^{\frac{4}{3}\beta+a}(x+a)^2dx=\left[\frac{(x+a)^3}{3}\right]_{\frac{4}{3}\alpha+a}^{\frac{4}{3}\beta+a}=\frac{1}{3}\{(\frac{4}{3}\beta+2a)^3-(\frac{4}{3}\alpha+2a)^3\}$

$=\frac{1}{3}(\frac{64}{27}\beta^3+\frac{32}{3}\beta^2a+16\beta a^2+8a^3-\frac{64}{27}\alpha^3-\frac{32}{3}\alpha^2a-16\alpha a^2-8a^3)=\frac{64}{81}\{(\beta-\alpha)^3+3\alpha\beta(\beta-\alpha)\}+\frac{32a}{9}(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)+\frac{16a^2}{3}(\beta-\alpha)$

$=\{\frac{64}{27}(9+18a-\frac{27}{2}a)+\frac{32}{3}a+\frac{16a^2}{3}\}3\sqrt{2a+1}=(\frac{64}{3}+\frac{128}{3}a-\cancel{32a}+\cancel{32a}+16a^2)\sqrt{2a+1}=16(a^2+\frac{8}{3}a+\frac{4}{3})\sqrt{2a+1}$ —①

※ $(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9+18a$．$\beta-\alpha>0$ より $\beta-\alpha=3\sqrt{2a+1}$

lとmの交点の座標は　$4(\frac{2}{3}\alpha+\cancel{a})x-8(\frac{2}{3}\alpha+\cancel{a}+\frac{1}{3}a\alpha)=4(\frac{2}{3}\beta+\cancel{a})x-8(\frac{2}{3}\beta+\cancel{a}+\frac{1}{3}a\beta)$　$\frac{8}{3}(\beta-\alpha)x=(\frac{16}{3}+\frac{8}{3}a)(\beta-\alpha)$

$\beta-\alpha\neq 0$ より　$x=a+2$．$y=4(\frac{2}{3}\alpha+a)(a+2)-8(\frac{2}{3}\alpha+a+\frac{1}{3}a\alpha)=4(\cancel{\frac{2}{3}\alpha a}+\cancel{\frac{4}{3}\alpha}+a^2+\cancel{2a}-\cancel{\frac{4}{3}\alpha}-\cancel{2a}-\cancel{\frac{2}{3}a\alpha})=4a^2$ より $(a+2, 4a^2)$

$\{(\frac{4}{3}\alpha+2a)^2+4a^2\}(\cancel{a}+2-\frac{4}{3}\alpha-\cancel{a})\frac{1}{2}+\{4a^2+(\frac{4}{3}\beta+2a)^2\}(\frac{4}{3}\beta+\cancel{a}-\cancel{a}-2)\frac{1}{2}=\{\frac{16}{9}(3\alpha+\frac{9}{2}a)+\frac{16}{3}\alpha a+8a^2\}(1-\frac{2}{3}\alpha)+\{\frac{16}{9}(3\beta+\frac{9}{2}a)+\frac{16}{3}\beta a+8a^2\}(\frac{2}{3}\beta-1)$

$=16(\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}\alpha a+\frac{1}{2}a^2)(1-\frac{2}{3}\alpha)+16(\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}\beta a+\frac{1}{2}a^2)(\frac{2}{3}\beta-1)$

$=16\{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(a+1)(3\alpha+\frac{9}{2}a)+(\frac{1}{3}+\cancel{\frac{1}{3}a}-\cancel{\frac{1}{3}a}-\frac{1}{3}a^2)\alpha+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(a+1)(3\beta+\frac{9}{2}a)+(-\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{3}a}+\cancel{\frac{1}{3}a}+\frac{1}{3}a^2)\beta-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a^2\}$

$=16\{(-\frac{2}{3}a-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}a^2)\alpha-\cancel{a^2}-\cancel{a}+(\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}a^2)\beta+\cancel{a^2}+\cancel{a}\}=\frac{16}{3}(a^2+2a+1)(\beta-\alpha)=16(a+1)^2\sqrt{2a+1}$ —②

①②より $S=16(\cancel{a^2}+\frac{8}{3}a+\frac{4}{3}-\cancel{a^2}-2a-1)\sqrt{2a+1}=\frac{16}{3}(2a+1)\sqrt{2a+1}=\frac{16}{3}(2a+1)^{\frac{3}{2}}$

※ (2)は図を書きにくい上に．計算も面倒な難問
$\alpha^2=3\alpha+\frac{9}{2}a$，$\beta^2=3\beta+\frac{9}{2}a$ を使う