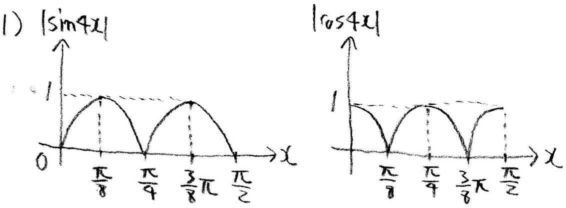
東大文科 1998前期 ③

(1)



$\sin\alpha=\sin\beta$ かつ $\cos\alpha=\cos\beta$ のとき $\alpha=\beta+2n\pi$ （nは任意の整数）

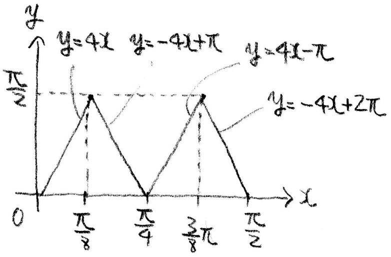
$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}$ のとき $\sin y=\sin 4x$ かつ $\cos y=\cos 4x$ 　 $y=4x+2n\pi$

$\frac{\pi}{8}\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき $\sin y=\sin 4x=\sin(\pi-4x)$ かつ $\cos y=-\cos 4x=\cos(\pi-4x)$ 　 $y=\pi-4x+2n\pi=-4x+(2n+1)\pi$

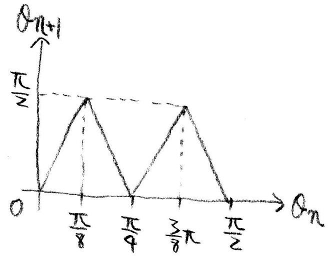
$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{3}{8}\pi$ のとき $\sin y=-\sin 4x=\sin(4x+\pi)$ かつ $\cos y=-\cos 4x=\cos(4x+\pi)$ 　 $y=4x+\pi+2n\pi=4x+(2n+1)\pi$

$\frac{3}{8}\pi\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $\sin y=-\sin 4x=\sin(-4x)$ かつ $\cos y=\cos 4x=\cos(-4x)$ 　 $y=-4x+2n\pi$

これらと $0\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$ より、グラフは右図



(2)



(1)より θ_n と θ_{n+1} の関係は左図のようになる

$\theta_n=0$ となる α の個数を a_n

$\theta_n=\theta$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ となる α の個数を b_n

$\theta_n=\frac{\pi}{2}$ となる α の個数を c_n とすると、

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n+c_n & \text{—①} \\ b_{n+1}=4b_n & \text{—②} \\ c_{n+1}=2b_n & \text{—③} \end{cases} \qquad a_1=1,\ b_1=1,\ c_1=1$$

②より $n\geqq 2$ のとき $b_n=4b_{n-1}=\cdots=4^{n-1}b_1=4^{n-1}$ これは $n=1$ のときも成立つ

③より $n\geqq 2$ のとき $c_n=2\cdot 4^{n-2}$

①より $n\geqq 2$ のとき $a_{n+1}=a_n+4^{n-1}+2\cdot 4^{n-2}=a_n+4^{n-1}+\frac{1}{2}4^{n-1}=a_n+\frac{3}{2}4^{n-1}$ 　 $\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\frac{1}{4}\frac{a_n}{4^n}+\frac{3}{32}$

$\frac{a_n}{4^n}=d_n$ とおくと $d_{n+1}=\frac{1}{4}d_n+\frac{3}{32}$ 　 $d_{n+1}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}(d_n-\frac{1}{8})$

$d=\frac{1}{4}d+\frac{3}{32}$ 　 $\frac{3}{4}d=\frac{3}{32}$ 　 $d=\frac{1}{8}$

$d_n-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}(d_{n-1}-\frac{1}{8})=\cdots=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}(d_2-\frac{1}{8})=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\left(\frac{1+1+1}{4^2}-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$

（※ $d_{n+1}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}(d_n-\frac{1}{8})$ は $n\geqq 2$ のときであるから $d_3-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}(d_2-\frac{1}{8})$ までしか成り立たない）

$d_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{8}$ 　 $a_n=\frac{1}{8}4^n+1=\frac{1}{2}4^{n-1}+1$

よって $\theta_k=0°$ となる α の個数は $\frac{1}{2}4^{k-1}+1$