東大理科　1999前期　②

(1) $z_n=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$ とおく。—①

φ を $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=\frac{4}{5}$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ を満たす数とすると $3+4i=5(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$z_{n+1}=5(\cos\varphi+i\sin\varphi)r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)+1=5r_n\{\cos\theta_n\cos\varphi-\sin\theta_n\sin\varphi+i(\sin\theta_n\cos\varphi+\cos\theta_n\sin\varphi)\}+1$

$=5r_n\cos(\theta_n+\varphi)+1+5r_n\sin(\theta_n+\varphi)\cdot i$

$|z_{n+1}|^2=25r_n^2\cos^2(\theta_n+\varphi)+10r_n\cos(\theta_n+\varphi)+1+25r_n^2\sin^2(\theta_n+\varphi)=25r_n^2+1+10r_n\cos(\theta_n+\varphi)$

$25r_n^2+1-10r_n=(5r_n-1)^2\geqq 0$ より

$25r_n^2+1-10r_n\leqq|z_{n+1}|^2\leqq 25r_n^2+1+10r_n$　$(5r_n-1)^2\leqq|z_{n+1}|^2\leqq(5r_n+1)^2$　$5r_n-1\leqq|z_{n+1}|\leqq 5r_n+1$ —②

$5\left(\frac{3\times5^{n-1}}{4}+x\right)-1=\frac{3\times5^n}{4}+x$ のとき $\cancel{\frac{3\times5^n}{4}}+5x-1=\cancel{\frac{3\times5^n}{4}}+x$　$x=\frac{1}{4}$

$5\left(\frac{5^n}{4}-x\right)+1=\frac{5^{n+1}}{4}-x$ のとき $\cancel{\frac{5^{n+1}}{4}}-5x+1=\cancel{\frac{5^{n+1}}{4}}-x$　$x=\frac{1}{4}$

$\frac{3\times5^{n-1}}{4}+\frac{1}{4}\leqq|z_n|\leqq\frac{5^n}{4}-\frac{1}{4}$ —③

$n=1$ のとき ③は成り立つ —④

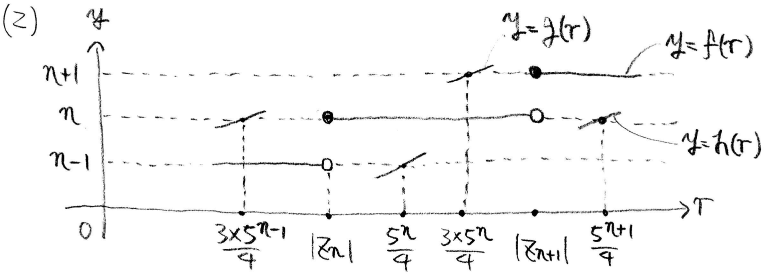
$n=k$ のとき③は成り立つと仮定すると、①より $\frac{3\times5^{k-1}}{4}+\frac{1}{4}\leqq r_k\leqq\frac{5^k}{4}-\frac{1}{4}$

$5r_k-1\geqq 5\left(\frac{3\times5^{k-1}}{4}+\frac{1}{4}\right)-1=\frac{3\times5^k}{4}+\frac{1}{4}$, $5r_k+1\leqq 5\left(\frac{5^k}{4}-\frac{1}{4}\right)+1=\frac{5^{k+1}}{4}-\frac{1}{4}$ より

②より $\frac{3\times5^k}{4}+\frac{1}{4}\leqq|z_{k+1}|\leqq\frac{5^{k+1}}{4}-\frac{1}{4}$ より $n=k+1$ のとき③は成り立つ —⑤

④⑤より③は成り立つ。　ゆえに $\frac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\frac{5^n}{4}$

(2)



$g(r)=\log_5\frac{20}{3}r$ とすると $g\left(\frac{3\times5^{n-1}}{4}\right)=\log_5\frac{20}{3}\frac{3\times5^{n-1}}{4}=\log_5 5^n=n$, $g\left(\frac{3\times5^n}{4}\right)=\log_5\frac{20}{3}\frac{3\times5^n}{4}=\log_5 5^{n+1}=n+1$

$h(r)=\log_5\frac{4}{5}r$ とすると $h\left(\frac{5^n}{4}\right)=\log_5\frac{4}{5}\frac{5^n}{4}=\log_5 5^{n-1}=n-1$, $h\left(\frac{5^{n+1}}{4}\right)=\log_5\frac{4}{5}\frac{5^{n+1}}{4}=\log_5 5^n=n$

よって $h(r)<f(r)<g(r)$, $\log_5\frac{4}{5}+\frac{\log r}{\log 5}<f(r)<\log_5\frac{20}{3}+\frac{\log r}{\log 5}$, $\frac{\log_5\frac{4}{5}}{\log r}+\frac{1}{\log 5}<\frac{f(r)}{\log r}<\frac{\log_5\frac{20}{3}}{\log r}+\frac{1}{\log 5}$

$\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{\log_5\frac{4}{5}}{\log r}+\frac{1}{\log 5}\right)=\lim_{r\to+\infty}\left(\frac{\log_5\frac{20}{3}}{\log r}+\frac{1}{\log 5}\right)=\frac{1}{\log 5}$ より、はさみうちの原理より $\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{\log r}=\frac{1}{\log 5}$