東大理科　2000前期　⑥

(1)
$$\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&c&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a&ab\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&c&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a+c&ab\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&z\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y&0\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&z\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y&yz\\0&1&x+z\\0&0&1\end{pmatrix}$$

よって
$$\begin{cases}a+c=y\\ab=yz\\b=x+z\end{cases}$$

ゆえに

$y=a+c$

$z=\dfrac{ab}{a+c}$

$x=\dfrac{ab+bc}{a+c}-\dfrac{ab}{a+c}=\dfrac{bc}{a+c}$

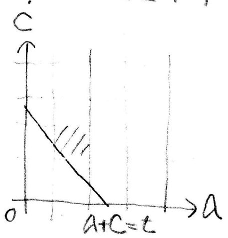
(2) $y=t$ のとき $a+c=t$, $2\leqq t\leqq 4$, このとき a, c の取り得る値の範囲を求める

(i) $2\leqq t\leqq 3$ のとき

右図より

$1\leqq a\leqq t-1$

$1\leqq c\leqq t-1$

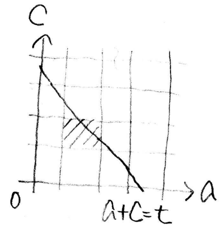


(ii) $3\leqq t\leqq 4$ のとき

右図より

$t-2\leqq a\leqq 2$

$t-2\leqq c\leqq 2$



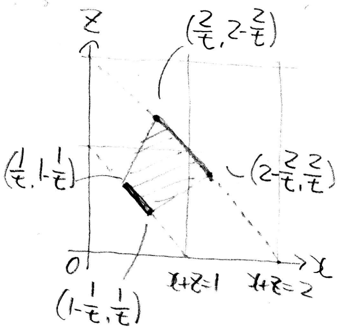
$y=t$ のとき $x=b\dfrac{c}{t}$, $z=b\dfrac{a}{t}$, $x+z=b$

(i) $2\leqq t\leqq 3$ のとき

$b\dfrac{1}{t}\leqq x\leqq b\left(1-\dfrac{1}{t}\right)$

$b\dfrac{1}{t}\leqq z\leqq b\left(1-\dfrac{1}{t}\right)$

セクロは右図の斜線部のようになる

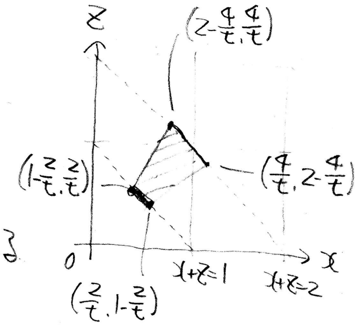


(ii) $3\leqq t\leqq 4$ のとき

$b\left(1-\dfrac{2}{t}\right)\leqq x\leqq b\dfrac{2}{t}$

$b\left(1-\dfrac{2}{t}\right)\leqq z\leqq b\dfrac{2}{t}$

セクロは右図の斜線部のようになる



(i) 面積は $\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{4}{t^2}-\left(2-\dfrac{2}{t}\right)^2\right|-\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{1}{t^2}-\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^2\right|$

$=\dfrac{1}{2}\left|-4+\dfrac{8}{t}\right|-\dfrac{1}{2}\left|-1+\dfrac{2}{t}\right|=2\left|-1+\dfrac{2}{t}\right|-\dfrac{1}{2}\left|-1+\dfrac{2}{t}\right|$

$=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{2}{t}\right)$

(ii) 面積は $\dfrac{1}{2}\left|\left(2-\dfrac{4}{t}\right)^2-\dfrac{16}{t^2}\right|-\dfrac{1}{2}\left|\left(1-\dfrac{2}{t}\right)^2-\dfrac{4}{t^2}\right|$

$=\dfrac{1}{2}\left|4-\dfrac{16}{t}\right|-\dfrac{1}{2}\left|1-\dfrac{4}{t}\right|=2\left|1-\dfrac{4}{t}\right|-\dfrac{1}{2}\left|1-\dfrac{4}{t}\right|$

$=\dfrac{3}{2}\left(-1+\dfrac{4}{t}\right)$

(3) 体積は $\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_2^3\left(1-\frac{2}{t}\right)dt+\frac{3}{2}\int_3^4\left(-1+\frac{4}{t}\right)dt=\frac{3}{2}\Big[t-2\log t\Big]_2^3+\frac{3}{2}\Big[-t+4\log t\Big]_3^4$

$=\dfrac{3}{2}(\cancel{3}-2\log 3-\cancel{2}+2\log 2-\cancel{4}+8\log 2+\cancel{3}-4\log 3)=\dfrac{3}{2}(10\log 2-6\log 3)=15\log 2-9\log 3$