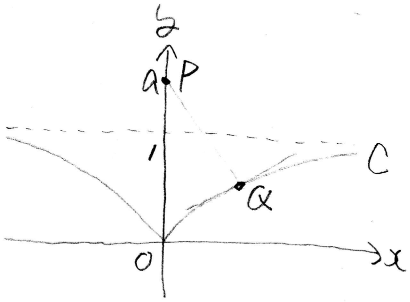
東大理科　2002前期　④



Cはy軸に関して対称であるから $x>0$ の範囲で考える

Qの座標を $\left(q, \frac{q^2}{q^2+1}\right)$, $q>0$, とする

$\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' = \frac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ であるから

QにおけるCの接線の傾きは $\frac{2q}{(q^2+1)^2}$ —①

$\frac{x^2}{x^2+1} = 1-\frac{1}{x^2+1}$

直線PQの傾きは $\frac{\frac{q^2}{q^2+1}-a}{q}$ —②

①②より $\frac{2\cancel{q}}{(q^2+1)^2}\cdot\frac{\frac{q^2}{q^2+1}-a}{\cancel{q}} = -1$ を満たすqが存在するようなaの範囲を求めればよい

$\frac{q^2}{q^2+1}-a = -\frac{1}{2}(q^2+1)^2$, $\frac{q^2}{q^2+1}+\frac{1}{2}(q^2+1)^2 = a$

Qの関数 $f(Q) = \frac{Q}{Q+1}+\frac{1}{2}(Q+1)^2$ $Q>0$ を考える

$f'(Q) = \frac{Q+1-Q}{(Q+1)^2}+Q+1 > 0$ であるから $f(Q)$ は単調増加

$f(0)=\frac{1}{2}$, $\lim_{Q\to\infty} f(Q) = \lim_{Q\to\infty}\left\{1-\frac{1}{Q+1}+\frac{1}{2}(Q+1)^2\right\} = \infty$

$f(Q)>\frac{1}{2}$, $\frac{q^2}{q^2+1}+\frac{1}{2}(q^2+1)^2 > \frac{1}{2}$, よって $a>\frac{1}{2}$