東大理科　2003前期 ⑤

(1) X_nが5で割り切れないとき

5が1回も出ない場合の数は 5^n通り．　この確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^n$

よって，X_nが5で割り切れる確率は $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

(2) X_nが4で割り切れないとき

2, 4, 6が1回も出ない場合の数は 3^n通り ―①

2が1回出て，残りは2, 4, 6が1回も出ない場合の数は $n\cdot 3^{n-1}$通り ―②

6が1回出て，残りは2, 4, 6が1回も出ない場合の数は $n\cdot 3^{n-1}$通り ―③

X_nが4で割り切れないのは①,②,③の場合のみであるから，この場合の数は $\left(\frac{2}{3}n+1\right)3^n$通り．

この確率は $\left(\frac{2}{3}n+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

よって X_nが4で割り切れる確率は $1-\left(\frac{2}{3}n+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(3) X_nが20で割り切れないとき

2, 4, 6が1回も出ない場合の数は 3^n通り

5が1回も出ない場合の数は 5^n通り．

2, 4, 5, 6が1回も出ない場合の数は 2^n通り

よって，2, 4, 6が1回も出ない，または5が1回も出ない場合の数は $3^n+5^n-2^n$通り ―④

2が1回出て残りは2, 4, 6が1回も出ない場合の数は $n\cdot 3^{n-1}$通り
このうち，5が1回も出ない場合の数は $n\cdot 2^{n-1}$通り ―⑤

6が1回出て，残りは2, 4, 6が1回も出ない場合の数は $n\cdot 3^{n-1}$通り
このうち，5が1回も出ない場合の数は $n\cdot 2^{n-1}$通り ―⑥

X_nが20で割り切れないのは④,⑤,⑥の場合のみであるから

この場合の数は $3^n+5^n-2^n+2\left(n\cdot 3^{n-1}-n\cdot 2^{n-1}\right)=(-n-1)2^n+\left(\frac{2}{3}n+1\right)3^n+5^n$

この確率は $(-n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}n+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n$

$1-P_n$はX_nが20で割り切れない確率であるから

$1-P_n=(-n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}n+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{5}{6}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{(-n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{6}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{3}n+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{6}{5}\right)^n+1\right\}$

$=\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{(-n-1)\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{3}n+1\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right\}$

$\frac{1}{n}\log(1-P_n)=\frac{1}{n}\log\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{1}{n}\log\left\{(-n-1)\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{3}n+1\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right\}=\log\frac{5}{6}+\frac{1}{n}\log\left\{(-n-1)\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{2}{3}n+1\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right\}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-P_n)=\log\frac{5}{6}$