東大理科　2004前期 ⑥，東大文科　2004前期 ④

(1) 白を○ 黒を× と表す．出た目が1,2であることをA，出た目が3,4であることをB，出た目が5,6であることをCと表す．

1回目		2回目	3回目
A	×○○	A ○○○	Aなら ×○○
		B ××○	Bなら ×○○
		C ×○×	Cなら ×○○
B	○×○	A ××○	Bなら ×○○
		B ○○○	Aなら ×○○
		C ○××	
C	○○×	A ×○×	Cなら ×○○
		B ○××	
		C ○○○	Aなら ×○○

左図より $\frac{7}{27}$

(2) n回目後　○○○である確率を α_n

対称性より ×○○，○×○，○○× である確率は等しいから，このどれかである確率を β_n

対称性より ○××，×○×，××○ である確率は等しいから，このどれかである確率を γ_n

××× である確率を δ_n とする．

(1)より

$\alpha_0=1 \quad \alpha_1=0$

$\beta_0=0 \quad \beta_1=1$

$\gamma_0=0 \quad \gamma_1=0$

$\delta_0=0 \quad \delta_1=0$

$\alpha_{n+1}=\frac{1}{3}\beta_n \qquad \alpha_{n+2}=\frac{1}{3}\beta_{n+1}=\frac{1}{3}\alpha_n+\frac{2}{9}\gamma_n$ —①

$\beta_{n+1}=\alpha_n+\frac{2}{3}\gamma_n \qquad \beta_{n+2}=\alpha_{n+1}+\frac{2}{3}\gamma_{n+1}=\frac{7}{9}\beta_n+\frac{2}{3}\delta_n$ —②

$\gamma_{n+1}=\delta_n+\frac{2}{3}\beta_n \qquad \gamma_{n+2}=\delta_{n+1}+\frac{2}{3}\beta_{n+1}=\frac{2}{3}\alpha_n+\frac{7}{9}\gamma_n$ —③

$\delta_{n+1}=\frac{1}{3}\gamma_n \qquad \delta_{n+2}=\frac{1}{3}\gamma_{n+1}=\frac{2}{9}\beta_n+\frac{1}{3}\delta_n$ —④

②④より $\beta_{n+2}+\delta_{n+2}=\beta_n+\delta_n$

nが偶数のとき $\beta_n+\delta_n=\beta_0+\delta_0=0$．$\beta_n\geqq 0$，$\delta_n\geqq 0$ より $\beta_n=\delta_n=0$

nが奇数のとき $\beta_n+\delta_n=\beta_1+\delta_1=1$　$\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\delta_n=1$，$\alpha_n\geqq 0$，$\gamma_n\geqq 0$ より $\alpha_n=\gamma_n=0$

$n=2k+1\ (k=0,1\cdots)$ のとき ②より $\beta_{2(k+1)+1}=\frac{7}{9}\beta_{2k+1}+\frac{2}{3}(1-\beta_{2k+1})=\frac{1}{9}\beta_{2k+1}+\frac{2}{3}$　　$\beta=\frac{1}{9}\beta+\frac{2}{3}$，$8\beta=6$

$k\geqq 1$ のとき $\beta_{2k+1}-\frac{3}{4}=\frac{1}{9}\left(\beta_{2(k-1)+1}-\frac{3}{4}\right)=\cdots=\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(\beta_1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k$　$\beta_{2k+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k+\frac{3}{4}$　これは $k=0$ のときも成立つ

$\delta_{2k+1}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k+\frac{1}{4}$

よって $\beta_{2k+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k+\frac{3}{4}$ → 文科の(2)

①③より $\alpha_{n+2}+\gamma_{n+2}=\alpha_n+\gamma_n$

nが偶数のとき $\alpha_n+\gamma_n=\alpha_0+\gamma_0=1$．$\alpha_n+\beta_n+\gamma_n+\delta_n=1$．$\beta_n\geqq 0$．$\delta_n\geqq 0$ より $\beta_n=\delta_n=0$

$n=2k\ (k=0,1\cdots)$ のとき ①より $\alpha_{2(k+1)}=\frac{1}{3}\alpha_{2k}+\frac{2}{9}(1-\alpha_{2k})=\frac{1}{9}\alpha_{2k}+\frac{2}{9}$　　$\alpha=\frac{1}{9}\alpha+\frac{2}{9}$　$8\alpha=2$

$k\geqq 1$ のとき $\alpha_{2k}-\frac{1}{4}=\frac{1}{9}\left(\alpha_{2(k-1)}-\frac{1}{4}\right)=\cdots=\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(\alpha_0-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k$　$\alpha_{2k}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k+\frac{1}{4}$　これは $k=0$ のときも成立つ

$\gamma_{2k}=-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k+\frac{3}{4}$

以上より $n=2k$ のとき $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}$ → 理科の(2)

$n=2k+1$ のとき $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k+\frac{3}{4}\right\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}$