東大理科　2005前期　③

(1) $f'(x)=\frac{1}{2}\{1+e^{-2(x-1)}\}+\frac{1}{2}xe^{-2(x-1)}(-2)=(-x+\frac{1}{2})e^{-2(x-1)}+\frac{1}{2}$

よって $x>\frac{1}{2}$ のとき $f'(x)<\frac{1}{2}$ —①

$f''(x)=-e^{-2(x-1)}+(-x+\frac{1}{2})e^{-2(x-1)}(-2)=(2x-2)e^{-2(x-1)}$

$f''(x)=0$ のとき $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f'(x)$の増減表は左表のようになる

よって $f'(x)\geqq 0$ —②

①.②より $x>\frac{1}{2}$のとき $0\leqq f'(x)<\frac{1}{2}$

(2) (1)より $x>\frac{1}{2}$ のとき $f(x)$は単調増加

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(1+e)>\frac{1}{2}$ より $x>\frac{1}{2}$ のとき $f(x)>\frac{1}{2}$

よって $x_n>\frac{1}{2}$

$f(1)=\frac{1}{2}(1+1)=1$ である

平均値の定理より cを $c>\frac{1}{2}$を満たす定数として $\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}=f'(c)$, $\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}=f'(c)$ と書ける

$0\leqq f'(c)<\frac{1}{2}$ であるから $\frac{|x_{n+1}-1|}{|x_n-1|}=f'(c)<\frac{1}{2}$

$|x_n-1|<\frac{1}{2}|x_{n-1}-1|<(\frac{1}{2})^2|x_{n-2}-1|<\cdots<(\frac{1}{2})^n|x_0-1|$

$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n|x_0-1|=0$ より $\lim_{n\to\infty}|x_n-1|=0$. $\lim_{n\to\infty}x_n=1$