東大理科 2005前期 ⑤ 《東大文科 2005前期④ も同じ問題》

(1) $c=a+1, a+2 \cdots N$ のとき 乙が勝つ この確率は $\frac{N-a}{N}$ —①

(iii)で $c=1, 2 \cdots a$ のときを考える.

(iv)で $c=1$ のとき, $a<1+d\leqq N$ のとき乙が勝つ, $d=a, a+1 \cdots N-1$ のとき乙が勝つ, この確率は $\frac{1}{N}\frac{N-a}{N}$

$c=2$ のとき, $a<2+d\leqq N$ のとき乙が勝つ, $d=a-1, a \cdots N-2$ のとき乙が勝つ, この確率は $\frac{1}{N}\frac{N-a}{N}$

⋮

$c=a$ のとき $a<a+d\leqq N$ のとき乙が勝つ, $d=1, 2 \cdots N-a$ のとき乙が勝つ この確率は $\frac{1}{N}\frac{N-a}{N}$ ②

①②より乙の勝つ確率は $\frac{N-a}{N}+a\frac{1}{N}\frac{N-a}{N}=1-\frac{a}{N}+\frac{a}{N}-\frac{a^2}{N^2}=1-\frac{a^2}{N^2}$, 甲の勝つ確率は $\frac{a^2}{N^2}$

(2) (ii)で $b=N+1-a \cdots N$ のとき (a通り) 乙が勝つ → 確率は $\frac{a}{N}$ —③

(iii)で $b=1$, $a+b=a+1$ のとき, $c=a+2 \cdots N$ のとき ($N-a-1$通り) 乙が勝つ

$b=2$, $a+b=a+2$ のとき $c=a+3 \cdots N$ のとき ($N-a-2$通り) 乙が勝つ

⋮

$b=N-a-1$, $a+b=N-1$ のとき $c=N$ のとき (1通り) 乙が勝つ

$b=N-a$ $a+b=N$ のとき 乙が勝つことはない

確率は $\frac{\sum_{n=1}^{N-a-1} n}{N^2}=\frac{\frac{1}{2}(N-a-1)(N-a)}{N^2}$

$=\frac{N^2+(-2a-1)N+a^2+a}{2N^2}$ —④

(iv)で $a+b=a+1$ のとき $c=1$ のとき $d=a+1 \cdots N-1$ のとき ($N-a-1$通り) 乙が勝つ

$c=2$ のとき $d=a \cdots N-2$ のとき ($N-a-1$通り) 乙が勝つ

⋮

$c=a+1$ のとき $d=1 \cdots N-a-1$ のとき ($N-a-1$通り) 乙が勝つ

合計 $(a+1)\{N-(a+1)\}$ 通り

$a+b=a+2$ のとき $c=1$ のとき $d=a+2 \cdots N-1$ のとき ($N-a-2$通り) 乙が勝つ

$c=2$ のとき $d=a+1 \cdots N-2$ のとき ($N-a-2$通り) 乙が勝つ

⋮

$c=a+2$ のとき $d=1 \cdots N-a-2$ のとき ($N-a-2$通り) 乙が勝つ

合計 $(a+2)\{N-(a+2)\}$ 通り

⋮

$a+b=N-1$ のとき $c=1$ のとき $d=N-1$ のとき (1通り) 乙が勝つ

$c=2$ のとき $d=N-2$ のとき (1通り) 乙が勝つ

⋮

$c=N-1$ のとき $d=1$ のとき (1通り) 乙が勝つ

合計 $(N-1)\{N-(N-1)\}$ 通り

$a+b=N$ のとき 乙が勝つことはない

合計 $\sum_{n=a+1}^{N-1} n(N-n)=N\frac{1}{2}(N-1)N-\frac{1}{6}(N-1)N(2N-1)-N\frac{1}{2}a(a+1)+\frac{1}{6}a(a+1)(2a+1)$

$=\frac{3N^3-3N^2-2N^3+3N^2-N+(-3a^2-3a)N+2a^3+3a^2+a}{6}=\frac{N^3+(-3a^2-3a-1)N+2a^3+3a^2+a}{6}$

確率は $\frac{N^3+(-3a^2-3a-1)N+2a^3+3a^2+a}{6N^3}$ —⑤

③④⑤より乙の勝つ確率は $\frac{6aN^2+3N^3+(-6a-3)N^2+(3a^2+3a)N+N^3+(-3a^2-3a-1)N+2a^3+3a^2+a}{6N^3}=\frac{4N^3-3N^2-N+2a^3+3a^2+a}{6N^3}$

よって甲の勝つ確率は $\frac{6N^3-4N^3+3N^2+N-2a^3-3a^2-a}{6N^3}=\frac{2N^3+3N^2+N-2a^3-3a^2-a}{6N^3}$