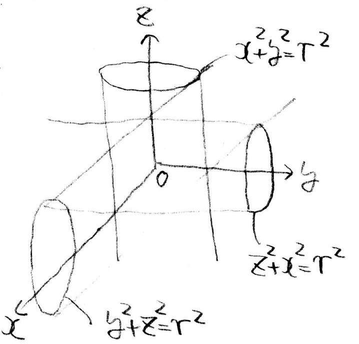
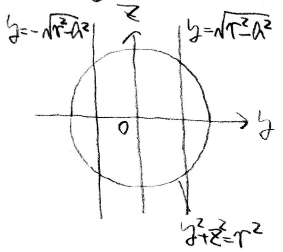
東大理科　2005前期　⑥



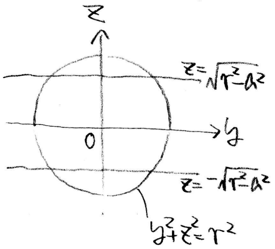


立体と平面 $x=a$ の交わりを考える

$|a|\leqq r$ のとき

平面 $x=a$ 上で、$x^2+y^2=r^2$ と $y^2+z^2=r^2$ は

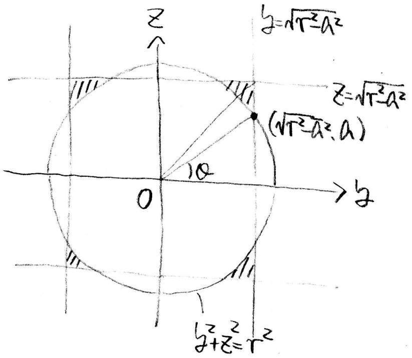
$a^2+y^2=r^2$、$y^2=r^2-a^2$、$y=\pm\sqrt{r^2-a^2}$ より左図のようになる



$|a|\leqq r$ のとき

平面 $x=a$ 上で $y^2+z^2=r^2$ と $z^2+x^2=r^2$ は

$z^2+a^2=r^2$、$z^2=r^2-a^2$、$z=\pm\sqrt{r^2-a^2}$ より左図のようになる



$\sqrt{r^2-a^2}=\frac{r}{\sqrt2}$　$r^2-a^2=\frac12 r^2$　$a^2=\frac12 r^2$

立体と平面 $x=a$ の交わりは、$|a|\leqq\frac{r}{\sqrt2}$ のとき存在して、左図の斜線部である

左図のように θ をとる

斜線部の面積を S とすると $\frac18 S=\frac12(r^2-a^2)-\frac12\sqrt{r^2-a^2}\,a-\frac{\frac{\pi}{4}-\theta}{2\pi}\pi r^2$ —①

a が 0 から $\frac{r}{\sqrt2}$ まで動くとき θ は 0 から $\frac{\pi}{4}$ まで動く —②

$\sin\theta=\frac{a}{r}$、$a=r\sin\theta$、$\frac{da}{d\theta}=r\cos\theta$、$da=r\cos\theta d\theta$ —③

$r^2-a^2+z^2=r^2$　$z^2=a^2$

①②③より立体の体積を V とすると、$V=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{4(r^2-r^2\sin^2\theta)-4\sqrt{r^2-r^2\sin^2\theta}\,r\sin\theta-4(\frac{\pi}{4}-\theta)r^2\}r\cos\theta d\theta$

$=8r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\theta-\cos\theta\sin\theta-\frac{\pi}{4}+\theta)\cos\theta d\theta=8r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{(-\frac{\pi}{4}+1)\cos\theta-\sin^2\theta\cos\theta-\cos^2\theta\sin\theta+\theta\cos\theta\}d\theta$

$=8r^3\{(-\frac{\pi}{4}+1)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\cos\theta d\theta\}$

ここで $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta=\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt2}$

$(\sin^3\theta)'=3\sin^2\theta\cdot\cos\theta$　$\sin^2\theta\cos\theta=(\frac{\sin^3\theta}{3})'$ より $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta=\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{6\sqrt2}$

$(\cos^3\theta)'=-3\cos^2\theta\sin\theta$　$\cos^2\theta\sin\theta=(-\frac{\cos^3\theta}{3})'$ より $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta=\left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=(-\frac{1}{6\sqrt2})-(-\frac13)=-\frac{1}{6\sqrt2}+\frac13$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta(\sin\theta)'d\theta=\left[\theta\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta d\theta=\frac{\pi}{4\sqrt2}-\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4\sqrt2}-(-\frac{1}{\sqrt2})+(-1)=\frac{\pi}{4\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}-1$ であるから

$V=8r^3\{(-\cancel{\frac{\pi}{4}}+1)\frac{1}{\sqrt2}-\cancel{\frac{1}{6\sqrt2}}+\cancel{\frac{1}{6\sqrt2}}-\frac13+\cancel{\frac{\pi}{4\sqrt2}}+\frac{1}{\sqrt2}-1\}=8r^3(\sqrt2-\frac43)=(8\sqrt2-\frac{32}{3})r^3$