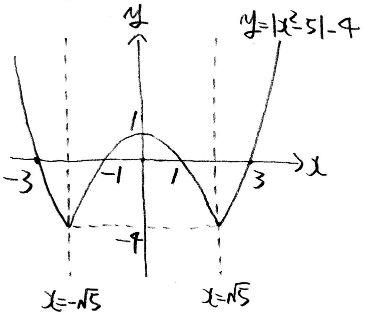
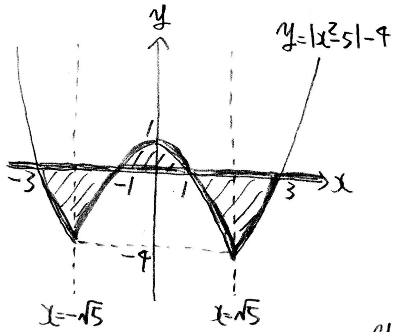
東大文科 2007前期 ①

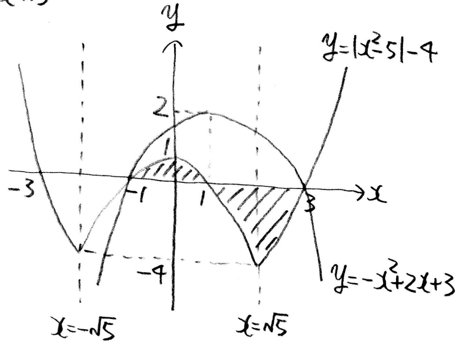
(1) $y=|x^2-5|-4$ は
$-\sqrt{5}\leqq x\leqq\sqrt{5}$ のとき $y=-x^2+1$
$x\leqq-\sqrt{5},\ x\geqq\sqrt{5}$ のとき $y=x^2-9$
よって、これのグラフは下図



$y(y-|x^2-5|+4)\leqq 0$ は
$y<0$ のとき、$y\geqq|x^2-5|-4$
$y>0$ のとき $y\leqq|x^2-5|-4$ であればよいから
これを満たす領域は下図の斜線部と太線部



$-x^2+2x+3=-(x^2-2x+1)+2=-(x-1)^2+2$
$-x^2+2x+3=0$ のとき $x^2-2x-3=0$, $(x-3)(x+1)=0$, $x=-1, 3$
$-x^2+2x+3=-x^2+1$ のとき $x=-1$
$-x^2+2x+3=x^2-9$ のとき $x^2-x-6=0$ $(x-3)(x+2)=0$ $x=-2, 3$
以上より D は右図の斜線部、境界線上の点含む



(2) $2\int_0^1(-x^2+1)dx+\int_1^{\sqrt{5}}(x^2-1)dx+\int_{\sqrt{5}}^3(-x^2+9)dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^{\sqrt{5}}+\left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_{\sqrt{5}}^3$

$=-\frac{2}{3}+2+\frac{5}{3}\sqrt{5}-\sqrt{5}-\frac{1}{3}+1-9+27+\frac{5}{3}\sqrt{5}-9\sqrt{5}=20+\left(\frac{10}{3}-10\right)\sqrt{5}=20-\frac{20}{3}\sqrt{5}$