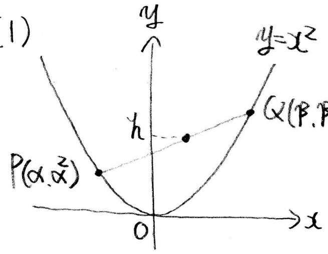
東大理科 2008前期 ④

(1)




P, Qの座標を $(\alpha, \alpha^2)$, $(\beta, \beta^2)$ ($\alpha<\beta$としてよい) とする

$h=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$, $L^2=(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2$, $m=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}$

$m=\alpha+\beta$, $L^2=(\beta-\alpha)^2\{1+(\alpha+\beta)^2\}$

$m^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, $m^2=2h+2\alpha\beta$ $\alpha\beta=\frac{1}{2}m^2-h$

$L^2=(2h-m^2+2h)(1+m^2)$. $4h=\frac{L^2}{m^2+1}+m^2$ $h=\frac{1}{4}\left(m^2+\frac{L^2}{m^2+1}\right)$

(2) $f(x)=x+\frac{L^2}{x+1}$ ($x\geqq 0$) を考える.

$f'(x)=1+\frac{-L^2}{(x+1)^2}$. $f'(x)=0$のとき $L=x+1$. $x=L-1$.

(i) $L\geqq 1$ のとき

| $x$ | $\cdots$ | $L-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $2L-1$ | $\nearrow$ |

$f(x)$の増減表は左表

よって $h$の最小値は $\frac{1}{2}L-\frac{1}{4}$

※ $f(L-1)=L-1+\frac{L^2}{L-1+1}=2L-1$

(ii) $0<L\leqq 1$ のとき

$f'(x)\geqq 0$. $f(x)$は単調増加であるから. $f(x)$の最小値は $f(0)=L^2$

よって. $h$の最小値は $\frac{1}{4}L^2$