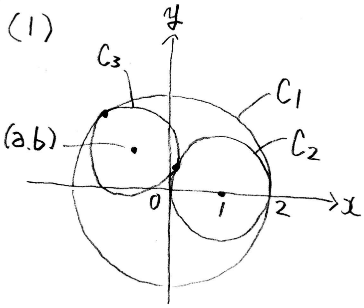
東大文科 2009前期 ①

(1)



C_3はC_1と$(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ $(0<\theta<\pi)$で接する とする.

$(a,b)=((2-t)\cos\theta, (2-t)\sin\theta)$

(a,b)と$(1,0)$の距離の2乗は $\{(2-t)\cos\theta-1\}^2+\{(2-t)\sin\theta\}^2$

$=(2-t)^2\cos^2\theta-2(2-t)\cos\theta+1+(2-t)^2\sin^2\theta=t^2-4t+4-4\cos\theta+2t\cos\theta+1$

これが$(t+1)^2$に等しいから $\cancel{t^2}-4t+5-4\cos\theta+2t\cos\theta=\cancel{t^2}+2t+1$ —①

$2t\cos\theta-6t=4\cos\theta-4$, $t\cos\theta-3t=2\cos\theta-2$.

$t=\dfrac{2(\cos\theta-3)+4}{\cos\theta-3}=2+\dfrac{4}{\cos\theta-3}$

$\theta=0$のとき $t=0$

θが大きくなると$\cos\theta$は小さくなり tは大きくなる.

$\theta=\pi$のとき $t=1$

よって $0<t<1$

①より $(2t-4)\cos\theta=6t-4$. $(t-2)\cos\theta=3t-2$. $\cos\theta=\dfrac{3t-2}{t-2}$ よって $a=-3t+2$

$\sin^2\theta+\dfrac{9t^2-12t+4}{(t-2)^2}=1$. $\sin^2\theta=\dfrac{t^2-4t+\cancel{4}-9t^2+12t-\cancel{4}}{(t-2)^2}=\dfrac{-8t^2+8t}{(t-2)^2}=\dfrac{8t(1-t)}{(2-t)^2}$

$\sin\theta>0$より $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2t(1-t)}}{2-t}$ よって $b=2\sqrt{2t(1-t)}$

(2) $0<t<1$のとき $t(1-t)=-t^2+t=-(t^2-t+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$ の最大値は $\frac{1}{4}$

よって bの最大値は $2\sqrt{2\frac{1}{4}}=\sqrt{2}$