東大文科 2009前期 ④

(1) $f(0)=0$ より $0=c$, $f(2)=2$ より $2=4a+2b$, $b=-2a+1$

よって $f(x)=ax^2+(-2a+1)x$, $f'(x)=2ax-2a+1$

$f'(0)=-2a+1$, $f'(2)=2a+1$, $a\neq 0$ のとき $f'(x)=0$ のとき $x=\frac{2a-1}{2a}$

(i) $a\leqq -\frac{1}{2}$ のとき

$$S=\int_0^{\frac{2a-1}{2a}}(2ax-2a+1)dx+\int_{\frac{2a-1}{2a}}^{2}(-2ax+2a-1)dx=\left[\cancel{2}a\frac{x^2}{\cancel{2}}-(2a-1)x\right]_0^{\frac{2a-1}{2a}}+\left[-\cancel{2}a\frac{x^2}{\cancel{2}}+(2a-1)x\right]_{\frac{2a-1}{2a}}^{2}$$

$$=a\frac{(2a-1)^2}{4a^2}-\frac{(2a-1)^2}{2a}\cancel{-4a}\cancel{+4a}-2+a\frac{(2a-1)^2}{4a^2}-\frac{(2a-1)^2}{2a}=\frac{1\cancel{-2}\cancel{+1}-2}{4a}(2a-1)^2-2=-\frac{(2a-1)^2}{2a}-2$$

$$=\frac{-4a^2+4a-1\cancel{-4a}}{2a}=-2a-\frac{1}{2a}$$

(ii) $-\frac{1}{2}<a<0$ のとき

$$S=\int_0^2(2ax-2a+1)dx=\left[\cancel{2}a\frac{x^2}{\cancel{2}}-(2a-1)x\right]_0^2=4a-4a+2=2$$

(iii) $a=0$ のとき $S=\int_0^2 1\cdot dx=\left[x\right]_0^2=2$

(iv) $0<a<\frac{1}{2}$ のとき

$S=\int_0^2(2ax-2a+1)dx=2$ ※(ii)より

(v) $a\geqq\frac{1}{2}$ のとき

$$S=\int_0^{\frac{2a-1}{2a}}(-2ax+2a-1)dx+\int_{\frac{2a-1}{2a}}^{2}(2ax-2a+1)dx=-\left\{\int_0^{\frac{2a-1}{2a}}(2ax-2a+1)dx+\int_{\frac{2a-1}{2a}}^{2}(-2ax+2a-1)dx\right\}$$

$=2a+\frac{1}{2a}$ ※(i)より

以上より
$$S=\begin{cases}-2a-\frac{1}{2a} & (a\leqq-\frac{1}{2})\\ 2 & (-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2})\\ 2a+\frac{1}{2a} & (a\geqq\frac{1}{2})\end{cases}$$

(2) $S(-a)=S(a)$ より $a>0$ のときのみを考えればよい.

$a\geqq\frac{1}{2}$ のとき 相加平均≧相乗平均より $2a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{2a\frac{1}{2a}}=2$

$0\leqq a<\frac{1}{2}$ のとき $S=2$

以上より Sの最小値は 2