

(1) $1 < \sqrt{2} < 2$ より $a_1 = \sqrt{2} - 1$ — (1)

$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$ $2 < \sqrt{2}+1 < 3$ より $a_2 = \sqrt{2}-1$

k をある自然数として $a_k = \sqrt{2}-1$ と仮定すると $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$, $2 < \sqrt{2}+1 < 3$ より $a_{k+1} = \sqrt{2}-1$ — (2)

①② より 数学的帰納法により $a_n = \sqrt{2}-1$

(2) $0 \leq a_1 < 1$ と仮定して $a_1 = a$ より $\frac{1}{3} \leq a < 1$ と仮定して $a_1 > \frac{1}{3}$ の場合を分けて考える

(i) $a = \frac{1}{3}$ のとき $a_1 = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{a_1} = 3$ より $a_2 = 0$ より不適

(ii) $\frac{1}{3} < a \leq \frac{1}{2}$ のとき $a_1 = a$, $2 \leq \frac{1}{a_1} < 3$ より $a_2 = a$ と仮定すると $\frac{1}{a} - 2 = a$

$a^2 + 2a - 1 = 0$ $a = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$ $\frac{1}{3} < a \leq \frac{1}{2}$ より $a = \sqrt{2}-1$ と仮定する

(1) より $a = \sqrt{2}-1$ のとき $a_n = a$ と仮定する

(iii) $\frac{1}{2} < a < 1$ のとき $a_1 = a$, $1 < \frac{1}{a_1} < 2$ より $a_2 = a$ と仮定すると $\frac{1}{a} - 1 = a$

$a^2 + a - 1 = 0$ $a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\frac{1}{2} < a < 1$ より $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ と仮定する

k をある自然数として $a_k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ と仮定すると $\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $1 < \frac{\sqrt{5}+1}{2} < 2$ より $a_{k+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

よって数学的帰納法により $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき $a_n = a$ と仮定する

以上より $a = \sqrt{2}-1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(3) $g=1$ のとき $a=p$, $a_1=0$ — (3)

$g=1$ のとき A_1 は整数, P_1 は $P_1 < g$ を満たす自然数とすると $a = A_1 + \frac{P_1}{g}$ と書け $a_1 = \frac{P_1}{g}$ と仮定する — (4)

k をある自然数として, P_{k-1}, P_k は $P_{k-1} > P_k$ を満たす自然数とすると $a_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$ と書けと仮定する — (5)

$P_k=1$ のとき $\frac{1}{a_k} = P_{k-1}$ $a_{k+1}=0$ — (6)

$P_k \neq 1$ のとき, A_{k+1} は整数, P_{k+1} は $P_{k+1} < P_k$ を満たす自然数とすると $a_{k+1} = A_{k+1} + \frac{P_{k+1}}{P_k}$ と書け $a_{k+1} = \frac{P_{k+1}}{P_k}$ — (7)

④⑤⑦ より ⑤ のような P_k が存在する場合 $P_k \leq g-k$ と仮定する

よって $P_{g-1} \leq 1$, P_{g-1} は自然数と仮定して $P_{g-1} = 1$, ⑥ より $a_g = 0$ — (8)

④⑤⑥⑦ より ⑤ のような P_k が存在しない場合 $a_k = 0$ このとき $k=g$ と仮定すると $a_g = 0$ — (9)

⑧⑨ より 題意は示された