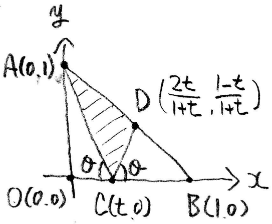
東大文科　2012前期 ②



$\angle ACO=\angle BCD=\theta$ とすると、$\tan\theta=\frac{1}{t}$

直線CDの方程式は $y=\frac{1}{t}(x-t)$、$y=\frac{1}{t}x-1$

直線ABの方程式は $y=-x+1$

$\frac{1}{t}x-1=-x+1$　$\frac{1+t}{t}x=2$、$x=\frac{2t}{1+t}$、$y=\frac{-2t+1+t}{1+t}=\frac{1-t}{1+t}$ より

Dの座標は $\left(\frac{2t}{1+t}, \frac{1-t}{1+t}\right)$

三角形ACDの面積を $S(t)$ とすると、

$S(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}(1-t)\frac{1-t}{1+t}=\frac{1}{2}\frac{\cancel{1}+\cancel{t}-\cancel{t}-t^2-\cancel{1}+2t-t^2}{1+t}=\frac{-t^2+t}{1+t}=\frac{-t^2-t+2t}{1+t}=-t+\frac{2t+2-2}{1+t}=-t+2-\frac{2}{1+t}$

$S'(t)=-1-\frac{-2}{(1+t)^2}=\frac{2-(1+t)^2}{(1+t)^2}$　$S'(t)=0$ のとき　$1+t=\pm\sqrt{2}$、$t=-1\pm\sqrt{2}$　$0<t<1$ より $t=-1+\sqrt{2}$

t	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$S'(t)$	$+$	0	$-$
$S(t)$	$\nearrow$	$3-2\sqrt{2}$	$\searrow$

$S(t)$ の増減表は左表

よって $S(t)$ の最大値は $3-2\sqrt{2}$

$S(-1+\sqrt{2})=1-\sqrt{2}+2-\frac{2}{\cancel{1}-\cancel{1}+\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$