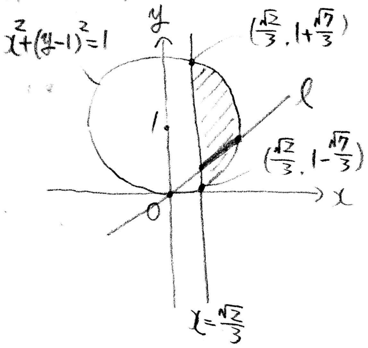
東大理科 2012前期 ①



Dは左図の斜線部. 境界線上の点含む.

$x^2+(y-1)^2=1$ と $x=\frac{\sqrt2}{3}$ の交点は,

$\frac{2}{9}+(y-1)^2=1$. $(y-1)^2=\frac{7}{9}$. $y-1=\pm\frac{\sqrt7}{3}$ $y=1\pm\frac{\sqrt7}{3}$ より $\left(\frac{\sqrt2}{3}, 1\pm\frac{\sqrt7}{3}\right)$

lの方程式を $y=kx$ とする.

条件より $\dfrac{1-\frac{\sqrt7}{3}}{\frac{\sqrt2}{3}}<k<\dfrac{1+\frac{\sqrt7}{3}}{\frac{\sqrt2}{3}}$, $\dfrac{3-\sqrt7}{\sqrt2}<k<\dfrac{3+\sqrt7}{\sqrt2}$

lと $x=\frac{\sqrt2}{3}$ の交点は $\left(\frac{\sqrt2}{3}, \frac{\sqrt2}{3}k\right)$

lと $x^2+(y-1)^2=1$ の原点以外の交点は

$x^2+(kx-1)^2=1$. $(k^2+1)x^2-2kx=0$ $x\neq0$より $x=\frac{2k}{k^2+1}$ より $\left(\frac{2k}{k^2+1}, \frac{2k^2}{k^2+1}\right)$

$L^2=f(k)$ とすると $f(k)=\left(\frac{2k}{k^2+1}-\frac{\sqrt2}{3}\right)^2+\left(\frac{2k^2}{k^2+1}-\frac{\sqrt2}{3}k\right)^2=(k^2+1)\left(\frac{2k}{k^2+1}-\frac{\sqrt2}{3}\right)^2$

$$f'(k)=2k\left(\frac{2k}{k^2+1}-\frac{\sqrt2}{3}\right)^2+\cancel{(k^2+1)}\,2\left(\frac{2k}{k^2+1}-\frac{\sqrt2}{3}\right)\frac{2(k^2+1)-2k\cdot2k}{(k^2+1)^{\cancel{2}}}$$

$$=2\left(\frac{2k}{k^2+1}-\frac{\sqrt2}{3}\right)\left(\frac{2k^{\cancel{2}}}{\cancel{k^2+1}}-\frac{\sqrt2}{3}k+\frac{-2k^2+2}{k^2+1}\right)=2\left(\frac{2k}{k^2+1}-\frac{\sqrt2}{3}\right)\left(\frac{2}{k^2+1}-\frac{\sqrt2}{3}k\right)$$

$$=2\left\{\frac{-\sqrt2k^2+6k-\sqrt2}{3(k^2+1)}\right\}\left\{\frac{-\sqrt2k^3-\sqrt2k+6}{3(k^2+1)}\right\}=\frac{4}{9}\frac{(k^2-3\sqrt2k+1)(k^3+k-3\sqrt2)}{(k^2+1)^2}$$

$f'(k)=0$のとき $k^2-3\sqrt2k+1=0$ $k=\frac{3\sqrt2\pm\sqrt{18-4}}{2}=\frac{3\sqrt2\pm\sqrt{14}}{2}=\frac{3\pm\sqrt7}{\sqrt2}$

$k^3+k-3\sqrt2=0$ $(k-\sqrt2)(k^2+\sqrt2k+3)=0$. $k=\sqrt2$

$$\begin{array}{r|l} & k^2+\sqrt2k+3 \\ \hline k-\sqrt2 & k^3 \quad\quad +k-3\sqrt2 \\ & k^3-\sqrt2k^2 \\ \hline & \sqrt2k^2+k \\ & \sqrt2k^2-2k \\ \hline & 3k-3\sqrt2 \\ & 3k-3\sqrt2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

k	$\frac{3-\sqrt7}{\sqrt2}$	…	$\sqrt2$	…	$\frac{3+\sqrt7}{\sqrt2}$
$f'(k)$		+	0	−	
$f(k)$		↗	$\frac{2}{3}$	↘	

※ $f(\sqrt2)=(2+1)\left(\frac{2\sqrt2}{2+1}-\frac{\sqrt2}{3}\right)^2=3\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$

$f(k)$の増減表は左表.

$f(k)$の最大値は $\frac{2}{3}$ より Lの最大値は $\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt6}{3}$

このとき $\tan\theta=\sqrt2$ $\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=2$, $\frac{1}{\cos^2\theta}=3$. $\cos\theta>0$より $\cos\theta=\frac{\sqrt3}{3}$