

2 正数  $x$  を与えて,

$$2a_1 = x, \quad 2a_2 = a_1^2 + 1, \quad \dots, \quad 2a_{n+1} = a_n^2 + 1, \quad \dots$$

のように数列  $\{a_n\}$  を定めるとき,

- (1)  $x \neq 2$  ならば,  $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$  となることを証明せよ.
- (2)  $x < 2$  ならば,  $a_n < 1$  となることを証明せよ. このとき, 正数  $\epsilon$  を  $1 - \frac{x}{2}$  より小となるようにとって,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  まだが  $1 - \epsilon$  以下となったとすれば, 個数  $n$  について次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$2 - x > n\epsilon^2$$