6　赤球が一個と白球が三個入った容器 A と，ほかに赤球と白球の入った容器 B と C がある．

いま，A，B，C から無作為に一個ずつ合計三個の球を取り出し，これらからやはり無作為に一個をとって A にかえすという操作をくり返す．

ただし容器 B から赤球が取り出される確率と白球が取り出される確率とは共に $\dfrac{1}{2}$ に保たれており，容器 C からはつねに赤球が取り出されるものとする．

(i)　上記の操作を n 回くり返したとき，容器 A に x 個の赤球が入っている確率を $P_n(x)$，$n=1,2,3,\cdots$ で表せば，関係式

$$P_{n+1}(x)=\frac{1}{12}(6+x)P_n(x)+\frac{1}{24}(1+x)P_n(x+1)+\frac{1}{8}(5-x)P_n(x-1)$$

が成り立つことを証明せよ．ただし $x \leqq -1$ または $x \geqq 5$ のときは $P_n(x)=0$ と定める．

(ii)　n 回目の操作を終えたとき A の中にある赤球の数の期待値 E_n を求めよ．

(iii)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} E_n$ を求めよ．