4 　行列 $M=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & -\dfrac{a}{1+a^2} \\ \dfrac{a}{1+a^2} & \dfrac{1}{1+a^2} \end{pmatrix}$ に対し，点列 $P_n=(x_n, y_n)$ $(n=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ を次のように定める．

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \cdots\cdots, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \cdots\cdots$$

(1) a が正の実数を動くとき，$\triangle P_0P_1P_2$ の面積を最大にする a の値を求めよ．

(2) a を (1) で求めた値とする．$\triangle P_0P_1P_2, \triangle P_1P_2P_3, \cdots\cdots, \triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ の和集合として表される図形の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．