

5 容量 1 リットルの m 個のビーカー (ガラス容器) に水が入っている. $m \geq 4$ から空のビーカーは無い. 入っている水の総量は 1 リットルである. また x リットルの水が入っているビーカーがただ一つあり, その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない.

このとき, 水の入っているビーカーが 2 個になるまで, 次の (a) から (c) までの操作を, 順に繰り返し行う.

- (a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを一つ選ぶ.
- (b) さらに, 残りのビーカーの中から, 入っている水の量が最も少ないものを一つ選ぶ.
- (c) 次に, (a) で選んだビーカーの水を (b) で選んだビーカーにすべて移し, 空になったビーカーを取り除く.

この操作の過程で, 入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは, そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする.

- (1) $x < \frac{1}{3}$ のとき, 最初に x リットルの水の入っていたビーカーは, 操作の途中で空になって取り除かれるか, または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ.
- (2) $x > \frac{2}{5}$ のとき, 最初に x リットルの水の入っていたビーカーは, 最後まで x リットルの水が入ったままで残ることを証明せよ.