

6 N を正の整数とする． $2N$ 個の項からなる数列 $\{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N\}$ を

$$\{b_1, a_1, b_2, a_2, \dots, b_N, a_N\}$$

という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする．並べ替えた数列は b_1 を初項とし， b_i の次に a_i ， a_i の次に b_{i+1} が来るようなものになる．また，数列 $\{1, 2, \dots, 2N\}$ をシャッフルしたときに得られる数列において，数 k が現れる位置を $f(k)$ で表す．

たとえば， $N = 3$ のとき， $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ をシャッフルすると $\{4, 1, 5, 2, 6, 3\}$ となるので，

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 6, \quad f(4) = 1, \quad f(5) = 3, \quad f(6) = 5$$

である．

- (1) 数列 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ を 3 回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ．
- (2) $1 \leq k \leq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し， $f(k) - 2k$ は $2N + 1$ で割り切れることを示せ．
- (3) n を正の整数とし， $N = 2^{n-1}$ のときを考える．数列 $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ を $2n$ 回シャッフルすると， $\{1, 2, 3, \dots, 2N\}$ にもどることを証明せよ．