

3 区間  $[0, 1]$  において関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \left(x \leq \frac{1}{2}\right) \\ -2x + 2 & \left(x > \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

とおく． $0 \leq a_1 \leq 1$  を満たす実数  $a_1$  を初期値として数列  $\{a_n\}$  を

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

で定める．このとき次の問に答えよ．

- (1)  $f(b) = b$  を満たす， $0 \leq b \leq 1$  なる実数  $b$  をすべて求めよ．
- (2)  $a_4$  が (1) で求めた  $b$  の値の 1 つに等しくなるような初期値  $a_1$  をすべて求めよ．
- (3) 条件

「ある  $n \geq 1$  に対して， $a_n$  が (1) で求めた  $b$  の値の 1 つに等しくなる」

を満たす初期値  $a_1$  はどのような実数として表されるか．

- (4) 初期値  $a_1$  が (3) の条件を満たさないとき， $a_n \geq \frac{3}{4}$  となるような  $n \geq 1$  が存在することを示せ．
- (5) 数列  $\{a_n\}$  が収束するために初期値  $a_1$  が満たすべき必要十分条件を求めよ．