

1 r は正の実数とし, 角 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする. xy 平面の原点 O を P_0 , $(1, 0)$ を P_1 として, 点 P_2, P_3, \dots を, 以下の条件 (a), (b), (c) が $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して満たされるようにとる.

(a) $P_{n+1}P_{n+2} = rP_nP_{n+1}$

(b) $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2} = \theta$

(c) 点 P_n, P_{n+2}, P_{n+3} は同一直線上にある.

このとき次の問に答えよ.

(1) r を θ を用いて表せ.

(2) 点 P_n の座標を (x_n, y_n) とする. 複素数 $z_n = x_n + y_n i$ を θ を用いて表せ.

(3) 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ がともに収束するための必要十分条件は $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ であることを証明せよ.

以下 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ をそれぞれ θ の関数と考えて, $\alpha(\theta), \beta(\theta)$ とおく.

(4) 極限值 $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}+0} \alpha(\theta), \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}+0} \beta(\theta)$ をそれぞれ求めよ.

(5) $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ における $\beta(\theta)$ の最大値を求めよ.