

2 10枚のカードに1から10までの数が1つずつ書かれている。これらのカードを用いた次のようなゲームを考える。 $r$ を自然数とする。このゲームは最大 $r$ ラウンドからなり、第1ラウンドから始まる。各ラウンドで、プレイヤーは、10枚のカードから1枚のカードを抜き出し、その数を見てから、「停止」または「続行」のいずれかを選択する。「停止」を選択した場合は、そのラウンドでゲームは終了し、最後に抜き出したカードに書かれた数が得点となる。「続行」を選択した場合は、抜き出したカードをもとにもどして、次のラウンドを実行する。最終ラウンドでは、「停止」しか選択できず、そのラウンドで抜き出したカードに書かれた数が得点となる。ただし、各ラウンドで、どのカードも等しい確率 $\frac{1}{10}$ で抜き出されるものとする。

抜き出したカードに書かれた数 $x$ によって「停止」または「続行」を選択する規則を、そのラウンドにおける戦略という。戦略はラウンドごとに、0または1の値をとる関数 $f(x)$  ( $x = 1, 2, \dots, 10$ )によって、 $f(x) = 0$ ならば「続行」、 $f(x) = 1$ ならば「停止」と定める。

(1)  $k$ は $1 \leq k < 10$ を満たす自然数とする。関数 $f_k(x)$ を

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & (1 \leq x \leq k) \\ 1 & (k < x \leq 10) \end{cases} \quad \text{とする。最終ラウンドをのぞくすべてのラウンドで、}$$

$f_k(x)$ によって定まる戦略を採用したときの得点の期待値を、 $r$ と $k$ で表せ。

(2) ラウンド数 $r$ が2のとき、得点の期待値が最大となるような、第1ラウンドでの戦略を与え、そのときの得点の期待値を求めよ。

(3) ラウンド数 $r$ が3のとき、得点の期待値が最大となるような、第1ラウンドおよび第2ラウンドでの戦略をそれぞれ与え、そのときの得点の期待値を求めよ。