

4  $p$  を自然数とする．次の関係式で定められる数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  を考える．

$$\begin{cases} a_1 = p, & b_1 = p + 1 \\ a_{n+1} = a_n + pb_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_{n+1} = pa_n + (p + 1)b_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

(1)  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対し，次の 2 つの数がともに  $p^3$  で割り切れることを示せ．

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np, \quad b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2)  $p$  を 3 以上の奇数とする．このとき， $a_p$  は  $p^2$  で割り切れるが， $p^3$  では割り切れないことを示せ．