

5 r を 0 以上の整数とし, 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r, \quad a_2 = r + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また, 素数 p を 1 つとり, a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし, 0 を p で割った余りは 0 とする。

- (1) 自然数 n に対し, b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。
- (2) $r = 2, p = 17$ の場合に, 10 以下のすべての自然数 n に対して, b_n を求めよ。
- (3) ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して,

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき, $b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

- (4) a_2, a_3, a_4, \dots に p で割り切れる数が現れないとする。このとき, a_1 も p で割り切れないことを示せ。