

6 実数 b, c, p, q, r に対し,

$$x^4 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$$

が x についての恒等式であるとする。

(1) $p \neq 0$ であるとき, q, r を p, b で表せ。

(2) $p \neq 0$ とする。 b, c が定数 a を用いて

$$b = (a^2 + 1)(a + 2), \quad c = -\left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

と表されているとき, 有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\{p^2 - (a^2 + 1)\}\{p^4 + f(a)p^2 + g(a)\} = 0$$

を満たすものを 1 組求めよ。

(3) a を整数とする。 x の 4 次式

$$x^4 + (a^2 + 1)(a + 2)x - \left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ。